Groupes simples connexes minimaux de type impair

Adrien Deloro

Université Paris 7 - Denis Diderot
Doctorat de Mathématiques

Groupes simples connexes minimaux de type impair

Adrien Deloro

Soutenue le 4 mai 2007

Directeur :
Eric Jaligot

Rapporteurs :
Alexandre Borovik
Gregory Cherlin

Jury :
Alexandre Borovik
Michel Brion
Zoé Chatzidakis
Olivier Frécon
Eric Jaligot
Frank Wagner

A l'Elisabeth,
ces quelques
fleurs
bleu
algèbre

Remerciements

En premier lieu je voudrais remercier mon directeur de thèse Eric Jaligot à plus d'un titre. Le sujet, qui lui tenait à cœur ; son conseil, son soutien ; ses remarques, ses relectures ; tout le temps et le soin consacrés à superviser ce travail appellent une vive reconnaissance. Multiples et parfois incongrues sont les situations où nous avons pu discuter de groupes de rang de Morley fini. J'en retiens la formation mathématique, et bien plus encore.

Je remercie toute l'équipe de logique de Paris 7 pour avoir accueilli cette thèse ; et particulièrement Zoé Chatzidakis qui dirigea mes premiers pas dans la recherche. Les membres de l'"intendance" parisienne sont bien sûr englobés dans ces remerciements ; j'ai plus d'une fois abusé de leur efficacité et de leur gentillesse. Karim Latouche a fait refranchir à ces travaux un Léthé numérique. Michèle Wasse eût sauvé Josef K.

A l'équipe de Lyon je dois tant : et notamment à Frank Wagner pour m'avoir initié à la théorie des modèles, ainsi qu'à Tuna Altınel dont les cours m'ont fait découvrir les groupes de rang de Morley fini.

Les conversations avec Alexandre Borovik, Gregory Cherlin, Olivier Frécon, et Jeffrey Burdges ont profondément contribué au développement de cette thèse. Des deux premiers, qui en sont les rapporteurs, je me sens l'obligé.

Aussi suis-je très heureux que plusieurs d'entre les personnes citées puissent constituer le jury de ma thèse : j'ai ainsi l'occasion de les remercier encore. Je n'oublie pas Michel Brion auquel je suis tout spécialement reconnaissant d'avoir accepté d'y participer.

Un grand merci à tous les thésards du 5C06, passés, présents et futurs, pour maintenir l'état d'esprit amical et inventif qui stimule au mieux la réflexion.

Un grand merci à mes amis : mathématiciens ou pas, ils ont tous su compter dans cette thèse. Et pour Lola-Jane, une merveilleuse gratitude.

Table des matières

Introduction

> "- Oh no ; nothing of that nature. The fact is, the business is *very* simple indeed, and I make no doubt that we can manage it sufficiently well ourselves ; but then I thought Dupin would like to hear the details of it, because it is so excessively *odd*."
>
> "- Simple and odd," said Dupin.
>
> *The Purloined Letter*

Groupes de rang de Morley fini

Il est possible de présenter les groupes de rang de Morley fini avec pour unique référence à la théorie des modèles la notion de partie définissable. Les axiomes de Borovik-Poizat prennent en charge l'éviction de la logique au profit d'une combinatoire aisément décrite. Un groupe G est dit *rangé* s'il existe sur l'ensemble de ses parties définissables (dans G^{eq}, et avec paramètres) une fonction rg à valeurs entières satisfaisant les quatre axiomes de monotonie, définissabilité, additivité, et élimination des quanteurs infinis. Nous renvoyons à [BN94, §4].

La "monotonie" correspond à la définition du rang de Morley. L'"élimination des quanteurs infinis" élimine surtout les démarches de compacité pour obtenir des bornes uniformes. Les extensions élémentaires sont dès lors sans utilité ; de fait le but des quatre axiomes était de permettre au praticien de ne jamais sortir du modèle étudié. Les techniques du domaine relèvent ainsi de la pure théorie des groupes ; seule exception, mais de taille, le théorème de Wagner sur les sections définissables des mauvais corps de caractéristique première (qui ne sont pas sans torsion) ressortit bien à la théorie des modèles.

De tels groupes étaient étudiés avant l'axiomatisation dite "de Borovik-Poizat" ; leur émergence est liée à l'intérêt pour les théories $\aleph_1$-catégoriques. Le théorème de Baldwin sur les structures $\aleph_1$-catégoriques (qui sont de rang de Morley fini) fut la première étape de leur description comme "groupes munis d'une dimension abstraite mais oublieux de leur étymologie", que nous continuerons à appeller groupes de rang de Morley fini.

Dans un groupe de rang de Morley fini, le degré de Morley entraîne l'existence d'une notion de composante connexe pour les sous-groupes définissables ; ici encore, comme pour tout point non détaillé, nous nous appuyons sur [BN94].

Conjecture d'Algébricité et programme de classification

Conjecture d'Algébricité (Cherlin-Zilber) *Un groupe simple infini de rang de Morley fini est isomorphe à un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.*

L'existence de "mauvais corps", annoncée en 2006 [BHMPW06], incite à la prudence : il ne serait pas trop surprenant qu'un contre-exemple à la Conjecture d'Algébricité soit un jour construit. Mais l'objet de l'étude des groupes de rang de Morley fini n'est pas tant de se prononcer sur cette conjecture, que d'offrir une sorte d'épure de la classification des groupes simples finis.

A cette fin, la ligne d'attaque retenue pour la Conjecture de Cherlin-Zilber doit être compatible avec la démarche de classification des groupes simples finis. Le *programme de Borovik* distingue selon la structure d'un 2-sous-groupe de Sylow, noté classiquement S. En l'occurence, on définit quatre *types*, correspondant à la caractéristique du corps sous-jacent attendu :

type pair : $S^\circ = U$, un groupe 2-unipotent non-trivial ;

type impair : $S^\circ = T$, un 2-tore non-trivial ;

type mixte : $S^\circ = T * U$, avec T un 2-tore non-trivial et U un groupe 2-unipotent non-trivial ;

type dégénéré : $S^\circ = 1$, i.e. S fini.

Les tores sont définis ci-après, et l'unipotence en §1.8.1.

Après plus de dix années que couronnera [ABC06], il a été prouvé que la Conjecture de Cherlin-Zilber est vérifiée pour le type pair, et aussi qu'il n'y a pas de groupe simple de rang de Morley fini de type mixte. Il a également été montré dans [BBC06] qu'un groupe de rang Morley fini connexe de type dégénéré est sans involution. Ce dernier cas est loin d'être résolu ; aucune des prises offertes ne semble suffisante. Il n'est d'ailleurs pas déraisonnable à l'excès de penser que la question des mauvais groupes est l'affaire des théoriciens des modèles.

Nous nous placerons en type impair : la composante connexe du 2-sous-groupe de Sylow est un 2-tore, à savoir un produit direct de groupes de Prüfer $\mathbb{Z}_{2^\infty}$. Le nombre de facteurs est fini et appelé le 2*-rang de Prüfer*, ou rang de Prüfer quand il n'y a pas risque de confusion avec d'autres nombres premiers.

Groupes simples connexes minimaux de type impair

Parmi les groupes simples de rang de Morley fini, certains possèdent une section définissable infinie propre encore simple, et devraient faire l'objet d'un traitement inductif. D'autres n'ont de sections définissables connexes propres, que résolubles ; on les appelle *groupes simples connexes minimaux*. Il s'agit des "atomes" de l'analyse à l'œuvre ; leur classification est une étape indispensable. La notion est empruntée à la démarche menée par Thompson dans une série d'articles dont le premier est [Tho68]. Dans la nature, le seul groupe algébrique simple connexe minimal est PSL_2.

Un outil essentiel pour l'étude des groupes de rang de Morley fini est le théorème du corps de Zilber, qui fait apparaître un fragment de corps algébriquement clos dans un groupe infini de rang de Morley fini résoluble, mais pas nilpotent. Dans le contexte simple connexe minimal non-dégénéré, il s'avère que de tels sous-groupes existent. En effet le groupe ambiant serait sinon un mauvais groupe, et n'aurait donc pas d'involution d'après un résultat devenu classique. Ainsi l'hypothèse sur le type offre-t-elle une certaine prise, en écartant de nos arguments l'obstacle des mauvais groupes. Ce problème éliminé, il reste celui des mauvais corps ; c'est ici qu'entrera en jeu la notion d'unipotence. Rappelons qu'un *mauvais corps* est un corps de rang de Morley fini avec un sous-groupe propre infini définissable du groupe multiplicatif.

Les groupes simples connexes minimaux de type impair ont déjà été l'objet d'une étude poussée dans [CJ04]. Ce dernier article supposait en outre l'*ordinarité*, ou absence de mauvais corps ; cette hypothèse n'était pas formulée dans l'espoir que la théorie des modèles viendrait au secours de la conjecture d'algébricité, mais pour forger d'importantes techniques ; il faut dire que même dans ce cas censément favorable, des configurations non-algébriques restaient parmi le champ du possible.

Un résultat positif est en revanche le confinement des groupes simples connexes minimaux de type impair au petit rang de Prüfer : dans [BCJ07] il est montré que celui-ci n'excède pas 2.

Cette thèse est ainsi consacrée aux groupes de rang de Morley fini simples connexes minimaux de type impair, et de rang de Prüfer 1 ou 2. Les chapitres 1 et 2 présentent quelques outils ; le chapitre 3 forme sans doute son cœur. On y montre un théorème d'identification de PSL_2 parmi les groupes simples connexes minimaux de type impair. Les hypothèses en sont assez générales pour que l'on puisse espérer prouver un jour son unicité comme tel ; le reste de la thèse est voué à cerner les pathologies possibles. Le chapitre 4, sous un faux air désinvolte, contient l'importante cotoricité ; enfin, le chapitre 5 est consacré au rang de Prüfer 2.

(Quelques pages d'addenda, rédigées après dépôt, complètent ce travail.)

Chapitre 1

Boîte à outils

Le lecteur soucieux de trouver *du nouveau* peut se transporter en §1.9 ; le reste est classique, ou y prépare. Nous rappellerons notamment des éléments de théorie de l'unipotence (§1.8), dont l'avatar en caractéristique nulle est l'unipotence de Burdges ; ces théories permettront le contrôle d'intersections grâce à la dernière incarnation du lemme de Jaligot, Lemme 1.9.1.

Définition 1.0.1 *Un groupe de rang de Morley fini est* simple connexe minimal *s'il est simple infini, et que tout sous-groupe définissable connexe propre en est résoluble.*

Définition 1.0.2 *Un* sous-groupe de Borel *d'un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal en est un sous-groupe propre, définissable, connexe, et maximal pour ces propriétés.*

La thèse ira sur les brisées du résultat suivant. Il requiert la notion empruntée à la théorie des groupes finis de radical impair, présentée plus bas, dans le Fait 1.8.6.

Fait 1.0.3 ([CJ04, Theorem 1.8]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini* ordinaire*, simple connexe minimal, et de type impair. Soient S un 2-sous-groupe de Sylow de G, $V = \langle I(S^\circ)\rangle$, $T = C^\circ(S^\circ)$, $C = C^\circ(V)$, et $W = N(T)/T$. Alors le rang de Prüfer de G est au plus 2, et l'on a les possibilités suivantes :*

1. *Le rang de Prüfer de G est 1 :*
   - (a) *Si C n'est pas un sous-groupe de Borel de G, alors $G \simeq \mathrm{PSL}_2(K)$, où K est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2.*
   - (b) *Si C est un sous-groupe de Borel de G et que $W \neq 1$, alors $C = T$ est 2-divisible et abélien, $|W| = 2$, W agit par inversion sur T, et $N(T)$ se scinde sous la forme $T \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En outre toutes les involutions de G sont conjuguées.*
2. *Le rang de Prüfer de G est 2 :*
   Alors $T = C = C(V)$ est nilpotent, $|W| = 3$, toutes les involutions de G sont conjuguées, et G interprète un corps algébriquement clos de caractéristique 3. En outre :
   - (a) *Si C n'est pas un sous-groupe de Borel de G, alors T est divisible abélien, et pour chaque involution i de S°, le sous-groupe $B_i = C^\circ(i)$ est un sous-groupe de Borel de la forme $O(B_i) \rtimes T$, où $O(B_i)$ est inversé par les deux involutions de T distinctes de i.*
   - (b) *Sinon, C est un sous-groupe de Borel nilpotent de G.*

Le cas 1.a sera réécrit à l'identique dans le chapitre 3. Le cas 1.b de même, dans l'analyse menée en §4.1. Le cas 2.b est exclu dès le début du chapitre 5. Plus problématique est le cas 2.a, pour lequel nous n'avons pas eu le temps de pousser les choses aussi loin : manque le contrôle du groupe de Weyl. Et si l'on savait combler ce fossé, il resterait encore la scission délicate à réaliser des sous-groupes de Borel… mais de cela nous reparlerons au chapitre 5. Un résumé des résultats obtenus est présenté dans le théorème du chapitre Conclusions.

1.1 Sous-groupes fortement inclus

Définition 1.1.1 *Un sous-groupe $M < G$ définissable propre d'un groupe de rang de Morley fini est* fortement inclus *s'il contient des involutions, mais que pour tout $g \notin N_G(M)$, $M \cap M^g$ est sans involution.*

Fait 1.1.2 ([BCJ07, Theorem 1]) *Soit G un groupe simple connexe minimal de rang de Morley fini et de type impair. Si G possède un sous-groupe fortement inclus, alors G est de rang de Prüfer* 1.

Fait 1.1.3 (tiré de [BCJ07, Fact 2.1]) *Soit G un groupe simple connexe minimal de rang de Morley fini et de type impair. Alors G est de rang de Prüfer* 1 *ou* 2.

1.2 Généricité

Etant donnée une partie X d'un groupe G, on note $X^{\#}$ l'ensemble $X \setminus \{1\}$.

Fait 1.2.1 ([CJ04, Fact 2.36]) *Soient G un groupe simple infini de rang de Morley fini, $M < G$ un sous-groupe propre définissable, et $x \in G^{\#}$. Alors* $\mathrm{rg}(x^G \cap M) < \mathrm{rg}(x^G)$.

Etant donnée une partie X d'un groupe G, on note X^G l'ensemble $\cup_{g \in G} X^g$.

Corollaire 1.2.2 *Soient G un groupe simple infini de rang de Morley fini, $M < G$ un sous-groupe propre définissable, et $\{1\} \neq X \subseteq G$ un sous-ensemble définissable. Alors* $\mathrm{rg}(X^G \cap M) < \mathrm{rg}(X^G)$.

Preuve

L'ensemble X^G est infini, car sinon le groupe G qui est connexe et le normalise doit le centraliser, d'où $X \subseteq Z(G) = \{1\}$, contre l'hypothèse.

Si X est fini, écrivons $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Alors $X^G = \cup_{i=1}^n x_i^G$ et $X^G \cap M = \cup_{i=1}^n x_i^G \cap M$. Soit $x_i \in X$ tel que $\mathrm{rg}(X^G \cap M) = \mathrm{rg}(x_i^G \cap M)$. Si $x_i = 1$, alors $\mathrm{rg}(X^G \cap M) = 0 < \mathrm{rg}(X^G)$, et le résultat est prouvé. Si $x_i \neq 1$, on lui applique le Fait 1.2.1, et il vient $\mathrm{rg}(X^G \cap M) = \mathrm{rg}(x_i^G \cap M) < \mathrm{rg}(x_i^G) \leq \mathrm{rg}(X^G)$, donc le résultat est encore prouvé. Nous supposons dorénavant que X est infini.

Notons $\sim$ la relation définissable de conjugaison dans G. Soit pour chaque $k \leq \mathrm{rg}(G)$ l'ensemble $X_k = \{x \in X, \mathrm{rg}(x^G \cap M) = k\}$. Ces ensembles en nombre fini sont définissables par définissabilité du rang et partitionnent X. L'un au moins est donc de même rang que X. Soit $k_0 \leq \mathrm{rg}(G)$ tel que $\mathrm{rg}(X_{k_0}) = \mathrm{rg}(X)$.

Soit pour chaque $\ell \leq \mathrm{rg}(G)$ l'ensemble $Y_\ell = \{x \in X_{k_0}, \mathrm{rg}(x^G) = \ell\}$. Les mêmes raisons que plus haut impliquent qu'il existe un $\ell_0 \leq \mathrm{rg}(G)$ tel que $\mathrm{rg}(Y_{\ell_0}) = \mathrm{rg}(X)$.

Notons que Y_{ℓ_0} est infini comme X, et en particulier $Y_{\ell_0}^{\#}$ n'est pas vide. Soit alors un élément x_0 de $Y_{\ell_0}^{\#}$. En appliquant le Fait 1.2.1 à x_0, il vient $k_0 < \ell_0$. Ainsi

$$\mathrm{rg}(X^G \cap M) = \mathrm{rg} \bigcup_{x \in X} \left(x^G \cap M\right) \leq \mathrm{rg}\,(X/\sim) + k_0 < \mathrm{rg}(X/\sim) + \ell_0 \leq \mathrm{rg}\, X,$$

ce qui prouve le corollaire. □

Définition 1.2.3 *Un sous-ensemble définissable X d'un groupe de rang de Morley fini G est* généreux dans G *si X^G est générique dans G.*

Fait 1.2.4 ([Jal06, Lemma 3.9]) *Soient $L \leq H \leq G$ des groupes de rang de Morley fini, H et L étant définissables. On suppose que H est connexe. Si L est généreux dans H et que H l'est dans G, alors L est généreux dans G.*

Définition 1.2.5 *Un* bon tore *d'un groupe de rang de Morley fini en est un sous-groupe définissable, abélien, divisible, et dont chaque sous-groupe définissable coïncide avec la clôture définissable de sa torsion. Un* tore décent *est plus généralement un sous-groupe définissable, abélien, divisible et qui coïncide avec la clôture définissable de sa torsion.*

Fait 1.2.6 ([Che05, Lemma 4]) *Soient G un groupe connexe de rang de Morley fini et $T \leq G$ un tore décent. Alors $C^\circ(T)$ est généreux dans G.*

Fait 1.2.7 ([Che05, dernières lignes]) *Les tores décents maximaux d'un groupe de rang de Morley fini sont conjugués.*

Fait 1.2.8 ([BBC06, Proposition 1.1]) *Soit G un groupe connexe infini de rang de Morley fini. Alors le centralisateur de chaque élément est infini.*

1.3 Involutions et 2-tores

Lemme 1.3.1 *Soient G un groupe, $H \leq G$ et $K \leq N(H)$ deux sous-groupes. On suppose que K est 2-divisible, et qu'il existe une involution $i \in G$ telle que*
- *i centralise ou inverse H, et*
- *i inverse K.*

Alors $[H, K] = 1$.

Preuve
Considérons le cas où i centralise H (l'autre cas est similaire, extrait de [BCJ07, Lemma 7.7]). Soit $(h, k) \in H \times K$. On a $h^k = (h^k)^i = (h^i)^{(k^i)} = h^{k^{-1}}$, d'où $[h, k^2] = 1$, et la conclusion en découle car K est 2-divisible. $\square$

L'ensemble des involutions d'un groupe G sera noté $I(G)$.

Si σ est un automorphisme involutif et définissable d'un groupe de rang de Morley fini G, on note $G^{-\sigma}$ (ou simplement G^- quand le contexte est clair) l'ensemble définissable $\{g \in G,\, g^\sigma = g^{-1}\}$. En général il ne s'agit pas d'un groupe. Le cas le plus fréquent est celui de l'action d'une involution i de G par conjugaison, et l'on notera alors G^{-i} l'ensemble inversé.

Fait 1.3.2 ([BN94, Exercice 14 p.73]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini sans involutions. Soit σ un automorphisme involutif et définissable de G. Alors $G^{-\sigma}$ est 2-divisible, et l'on a la décomposition univoque $G = C_G(\sigma) \cdot G^{-\sigma}$.*

Parfois le groupe sur lequel une involution agit ne sera pas $2^\perp$. Nous aurons alors besoin du résultat suivant.

Fait 1.3.3 *Soit A un groupe abélien connexe et 2-divisible de rang de Morley fini. Soit φ un automorphisme involutif et définissable de A. Alors $A = C_A(\varphi)(+)A^{-\varphi}$, où le symbole $(+)$ signifie que l'intersection est finie. En particulier, si $C_A(\varphi)$ est fini, alors φ inverse A.*

Preuve
A étant 2-divisible n'a qu'un nombre fini d'involutions. En particulier l'intersection est bien finie. Formons $\psi : A \to A$ qui à x associe $\psi(x) = x + \varphi(x)$. Alors $\ker(\psi) = A^{-\varphi}$ et $\mathrm{im}(\psi) \leq C_A(\varphi)$. Il vient donc $A = \ker(\psi)(+)\,\mathrm{im}(\psi) \leq A^{-\varphi}(+)C_A(\varphi) \leq A$.

Maintenant si $C_A(\varphi)$ est fini, la connexité de A implique $A = A^{-\varphi}$, et φ inverse A. $\square$

Fait 1.3.4 *Un automorphisme involutif α d'un 2-tore τ ne fixant qu'un nombre fini d'éléments de τ est l'inversion.*

Preuve
On peut désirer se servir du Fait 1.3.3 ; il faut alors rappeler que $\tau \rtimes \langle\alpha\rangle$ est bien un groupe de rang de Morley fini d'après un résultat de Mike Prest. Il n'est pas moins raisonnable de reprendre la démonstration du Fait 1.3.3, en remarquant que la notion de sous-groupe de Prüfer munit τ d'une dimension ayant les propriétés requises pour la preuve. $\square$

Fait 1.3.5 *Le seul automorphisme d'ordre fini d'un groupe de Prüfer $\mathbb{Z}_{2^\infty}$ est l'inversion.*

Preuve

Il est clair que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{2^\infty})$ est isomorphe au groupe des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}_2$. Mais on a $\mathbb{Z}_2^* \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$, et le terme de droite est sans torsion car de caractéristique nulle. En particulier $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{2^\infty})$ possède exactement un élément d'ordre fini. $\square$

Fait 1.3.6 ([CJ04, Fact 2.28]) *Soit H un groupe de rang de Morley fini tel que H/H° soit d'ordre 2, et que les éléments de $H \setminus H^\circ$ soient génériquement d'ordre 2. Alors H se scinde sous la forme $H = H^\circ \rtimes \langle w \rangle$, où w est une involution qui inverse H°.*

Fait 1.3.7 (Borovik-Poizat, [BN94, Lemma 10.8 et Theorem 10.11]) *Les 2-sous-groupes de Sylow d'un groupe de rang de Morley fini sont conjugués. En outre, de tels sous-groupes sont nilpotents-par-fini, et l'on peut décomposer leur composante connexe sous la forme*

$$S^\circ = T * U,$$

où T est un 2-tore, et U un 2-groupe définissable connexe nilpotent d'exposant borné.

Fait 1.3.8 ([BN94, Theorem 10.22]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini. Soient S un 2-sous-groupe de Sylow de G et T le 2-tore maximal de S. Alors $N(T)$ contrôle la fusion dans S°. (Cela signifie que si A et B sont sont deux sous-ensembles de S° conjugués dans G, alors A et B sont conjugués dans $N(T)$.)*

Fait 1.3.9 ([CJ04, Lemma 2.34]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini de type impair et de rang de Prüfer 1. Soient S un 2-sous-groupe de Sylow de G et i l'unique involution de S°. Alors $C(S^\circ) \cap i^G = \{i\}$.*

Corollaire 1.3.10 *Soit G un groupe de rang de Morley fini de type impair et de rang de Prüfer 1. Soient S° un 2-tore maximal de G et i l'unique involution de S°. Si une involution $w \in i^G \setminus \{i\}$ normalise S°, alors elle l'inverse. En particulier wi est S°-conjuguée à w, et G-conjuguée à i.*

Preuve

Si w n'inverse pas le 2-tore S°, elle le centralise d'après le Fait 1.3.5, ce qui contredit le Fait 1.3.9. Ainsi w inverse S°. Maintenant si α est une racine carrée de i dans S°, $w^\alpha = [\alpha, w]w = \alpha^{-2}w = i^{-1}w = iw = wi$. $\square$

Fait 1.3.11 (Théorème Z^*, [BBC06, Theorem 5]) *Soient G un groupe de rang de Morley fini, S un 2-sous-groupe de Sylow de G, et i une involution de S. Alors l'un des deux cas suivant se produit :*

(a) i est conjuguée dans G à une autre involution de S.

(b) $C(i)$ est connexe.

Fait 1.3.12 ([BC07, Corollary 5.10]) *Soient G un groupe connexe de rang de Morley fini de type impair, et S un 2-sous-groupe de Sylow de G. Alors $C_S(S^\circ) = S^\circ$.*

Enfin, le résultat suivant a radicalisé la situation en type dégénéré.

Fait 1.3.13 ([BBC06, Theorem 1]) *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini. Alors le 2-sous-groupe de Sylow de G est trivial ou infini.*

1.4 Torsion

Soit p un nombre premier non nul.

Fait 1.4.1 ([BN94, Exercice 11 p.93]) *Soient G un groupe de rang de Morley fini, et $H \lhd G$ un sous-groupe définissable. On suppose qu'il existe $x \in G$ tel que $\bar{x} \in G/H$ soit un p-élément. Alors xH contient un p-élément.*

Fait 1.4.2 (Rigidité des p-tores, [BN94, Theorem 6.16]) *Soit P un p-tore d'un groupe de rang de Morley fini G. Alors $N_G^\circ(P) = C_G^\circ(P)$.*

Fait 1.4.3 ([BN94, Theorem 6.20]) *Soit P un p-sous-groupe localement fini d'un groupe de rang de Morley fini G. Alors :*

1. *P° est nilpotent et $P^\circ = U * T$ est produit central d'un p-groupe nilpotent d'exposant borné U et d'un p-tore T.*
2. *$Z(P) \neq 1$ et P satisfait la condition de normalisateur.*
3. *Si P est infini d'exposant borné, alors $Z(P)$ possède une infinité d'éléments d'ordre p et P est nilpotent.*

Fait 1.4.4 ([FJ07, Theorem 1.8]) *Soit H un groupe résoluble connexe de rang de Morley fini. Alors les p-sous-groupes de Sylow de H sont connexes.*

La notion d'unipotence employée dans le fait suivant est présentée au début de §1.8.1. La *toricité* de la torsion signifie que tout p-élément de G appartient à au moins un p-tore.

Fait 1.4.5 ([BC06, Theorem 3]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini connexe et sans p-unipotence. Alors la p-torsion de G est torique. Plus précisément, si x est un p-élément, alors x appartient à tout p-tore maximal de $C^\circ(x)$.*

Un corollaire immédiat (avec la conjugaison des 2-sous-groupes de Sylow), est que les involutions d'un groupe simple connexe minimal de type impair et de rang de Prüfer 1 sont toutes conjuguées.

Fait 1.4.6 ([BC06, Theorem 4]) *Les p-sous-groupes de Sylow d'un groupe de rang de Morley fini sans p-unipotence sont conjugués.*

1.5 Sous-groupes de Carter

Un sous-groupe de *Carter* d'un groupe de rang de Morley fini est un sous-groupe définissable, connexe, nilpotent, et d'indice fini dans son normalisateur.

Fait 1.5.1 ([FJ07, Theorem 3.1]) *Tout groupe de rang de Morley fini possède des sous-groupes de Carter. En outre, tout sous-groupe abélien divisible de torsion est inclus dans un tel sous-groupe.*

Fait 1.5.2 ([FJ07, Theorem 3.9]) *Dans un groupe connexe résoluble de rang de Morley fini, les sous-groupes de Carter sont conjugués et autonormalisants.*

Les Faits 1.4.4, 1.5.1 et 1.5.2 impliquent le

Corollaire 1.5.3 *Soit H un groupe de rang de Morley fini* de type impair*, connexe et résoluble. Alors chaque sous-groupe de Carter de H contient un 2-sous-groupe de Sylow.*

Corollaire 1.5.4 *Soit H un groupe de rang de Morley fini* de type impair*, résoluble, et connexe. Soit T un p-tore de H. Alors T centralise un 2-tore maximal de H.*

Le fait suivant n'a pas le statut officiel de rigueur : car il n'a pas encore été publié. Précisons que nous ne l'emploierons pas avant le chapitre 4.

Fait 1.5.5 (Frécon, annoncé) *Les sous-groupes de Carter d'un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal sont conjugués.*

1.6 Corps

On note classiquement K_+ le groupe additif d'un corps et $K^\times$ son groupe multiplicatif. Etant donnés deux sous-groupes A et B d'un groupe de rang de Morley fini G, A est *B-minimal* si :
- A est définissable infini,
- B normalise A, et
- A est minimal pour ces propriétés (i.e., il ne possède pas de sous-groupe propre définissable infini normalisé par B).

Fait 1.6.1 (Théorème du corps de Zilber, [BN94, Theorem 9.1]) *Soit $G = A \rtimes H$ un groupe de rang de Morley fini, où A et H sont des sous-groupes abéliens infinis définissables tels que A soit H-minimal et $C_H(A) = 1$. Alors G interprète un corps algébriquement clos.*

Plus précisément, A est isomorphe au groupe additif d'un corps algébriquement clos K sur lequel H agit par multiplication du corps :

$$A \simeq K_+, \qquad H \simeq T \leq K^\times,$$

où T est un sous-groupe définissable de $K^\times$.

Nous utiliserons également deux propriétés en un sens complémentaires.

Fait 1.6.2 ([Poi87, Corollaire 3.3]) *Soit K un corps de rang de Morley fini* de caractéristique nulle. *Alors K_+ n'a pas de sous-groupe définissable non-trivial propre.*

Fait 1.6.3 ([Wag01, Corollary 9]) *Soit K un corps de rang de Morley fini* de caractéristique $p > 0$. *Alors $K^\times$ n'a pas de section définissable sans torsion.*

Ce dernier résultat sert à limiter les pathologies si un mauvais corps, i.e. un $T < K^\times$ dans le Fait 1.6.1, apparaît lors d'une étude de groupe. En effet le sous-groupe T possèdera nécessairement de la torsion.

1.7 Nilpotence

Fait 1.7.1 (Condition de normalisateur) *Soient G un groupe nilpotent et $H < G$ un sous-groupe propre. Alors $H < N_G(H)$.*

Fait 1.7.2 ([BN94, Lemma 6.1]) *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini. Si $Z(G)$ est fini, alors $G/Z(G)$ n'a pas de centre.*

Fait 1.7.3 ([BN94, Exercice 5 p.98]) *Soient G un groupe nilpotent de rang de Morley fini et H un sous-groupe normal infini de G. Alors $H \cap Z(G)$ est infini.*

On note $F(G)$ le sous-groupe de Fitting d'un groupe de rang de Morley fini G. Ce sous-groupe est définissable et nilpotent ([BN94, Theorem 7.3]).

Fait 1.7.4 ([BN94, Theorem 9.21]) *Soit G un groupe connexe résoluble de rang de Morley fini. Alors $G/F^\circ(G)$ est divisible et abélien.*

1.8 $\tilde{p}$-unipotence et $\tilde{p}$-sous-groupes de Sylow

Les longs rappels qui suivent introduisent la notion d'unipotence due à Burdges et certaines de ses applications.

1.8.1 Rappels en caractéristique première

Commençons par évoquer la théorie de la p-unipotence. Un p-sous-groupe d'un groupe de rang de Morley fini est *p-unipotent*, ou encore un *U_p-groupe*, s'il est définissable, connexe, nilpotent, et d'exposant borné. (D'après le Fait 1.7.4, la résolubilité suffit d'ailleurs dans cette définition pour assurer la nilpotence.)

Fait 1.8.1 ([CJ04, Corollary 2.16]) *Soit H un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Alors il existe un unique U_p-sous-groupe définissable* maximal *de H. Ce sous-groupe est contenu dans $F^\circ(H)$.*

Notation 1.8.2 *On note $U_p(H)$ ce sous-groupe.*

Fait 1.8.3 ([Bur07, Lemma 2.1]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal. Soient B_1 et B_2 deux sous-groupes de Borel distincts. Soit p un nombre premier. Si $F(B_1) \cap F(B_2) \neq 1$, alors $U_p(B_1) = 1$ ou $U_p(B_2) = 1$.*

En voici un corollaire utile.

Fait 1.8.4 ([Bur07, Corollary 2.2]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal. Soient B_1 et B_2 deux sous-groupes de Borel distincts. Alors $F(B_1) \cap F(B_2)$ est sans torsion.*

Beaucoup de nos raisonnements utiliseront le lemme suivant, valable en caractéristique première, et qui trouvera un analogue en caractéristique nulle dans le Lemme 1.9.1.

Lemme 1.8.5 *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal et B un sous-groupe de Borel de G. Soit $A \leq U_p(B)$ un sous-groupe infini (non nécessairement définissable). Alors B est l'unique sous-groupe de Borel de G contenant A.*

Preuve

Remarquons que $1 \neq d^\circ(A) \leq U_p(B)$ et que $d^\circ(A)$ est un U_p-sous-groupe de B. Soit B_1 un sous-groupe de Borel de G contenant A. Alors B_1 contient $d^\circ(A)$, et d'après le Fait 1.8.1, il vient $d^\circ(A) \leq U_p(B_1) \leq F^\circ(B_1)$. Le Fait 1.8.4 implique alors $B_1 = B$. $\square$

Pour mémoire, nous insérons les résultats "ordinaires" (c'est-à-dire, en l'absence de mauvais corps) de [CJ04], que nous n'emploierons évidemment pas. La définition présente dans le Fait 1.8.6, et dont le sens est assuré par la possibilité de "relever la torsion" (Fait 1.4.1), sera pourtant utile au chapitre 4.

Fait 1.8.6 ([CJ04, Lemma 2.41]) *Soit H un groupe résoluble de rang de Morley fini. Alors il existe un sous-groupe normal, définissable, connexe, et sans involution* maximal *de H, noté $O(H)$. De plus,* si H est ordinaire*, on a $O(H) \leq F^\circ(H)$.*

Fait 1.8.7 ([CJ04, Proposition 3.11]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal* et ordinaire*. Si B_1 et B_2 sont deux sous-groupes de Borel distincts tels que $O(B_1) \neq 1$ et $O(B_2) \neq 1$, alors $F(B_1) \cap F(B_2) = 1$.*

1.8.2 Unipotence en caractéristique nulle

Burdges a introduit dans [Bur04] une notion opérante d'unipotence *en caractéristique nulle*. L'argument décisif qui nous a convaincu de suivre l'exposé de [FJ07] en notant ∞ cette caractéristique était déjà chez Groucho Marx, dans *A night in Casablanca* (Archie Mayo, 1946) :

« - The next thing we're gonna do is change all the numbers on all the rooms !
- But the guests ! They will go into the wrong rooms ! Think of the confusion !
- Yes, but think of the fun ! »

Un groupe de rang de Morley fini est *indécomposable* s'il est abélien et ne peut s'écrire comme somme (même non nécessairement directe) de deux sous-groupes définissables propres. Tout groupe indécomposable est connexe ([Bur04, Lemma 1.2]). Si A est indécomposable, alors il possède un unique sous-groupe définissable connexe propre et maximal, noté $\Phi(A)$ et appelé sous-groupe de Frattini *connexe* de A (ce n'est pas la composante connexe du sous-groupe de Frattini de A).

Pour G un groupe de rang de Morley fini et d un entier non nul, on définit

$$U_{(\infty,d)}(G) = \left\langle A \leq G \;\middle|\; \begin{array}{c} A \text{ est un sous-groupe définissable indécomposable} \\ \text{tel que } A/\Phi(A) \text{ soit sans torsion et de rang } d \end{array} \right\rangle.$$

Définition 1.8.8 *Soit G un groupe de rang de Morley fini. On note $d_\infty(G)$ et on appelle* degré d'unipotence sans torsion *de G le plus grand $d \geq 1$, s'il existe, tel que $U_{(\infty,d)}(G) \neq 1$. On pose sinon $d_\infty(G) = 0$.*

Nous verrons plus bas, avec le Fait 1.8.14, que l'absence d'unipotence n'est pas un obstacle à l'étude d'un groupe.

Notation 1.8.9 *Quand $d_\infty(G) > 0$, on note $U_\infty(G) = U_{(\infty,d_\infty(G))}(G)$.*

Cette notion a des propriétés similaires à l'unipotence en caractéristique première. Avant de les passer en revue nous unifions la notation.

1.8.3 Paramètres d'unipotence

$\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers. Par analogie avec le d_∞ de la Définition 1.8.8 ci-dessus, on introduit une notation-gadget.

Notation 1.8.10 *Soit p un nombre premier. On pose $d_p(H) = \infty$ si H possède un U_p-sous-groupe non-trivial. On pose $d_p(H) = 0$ sinon.*

Définition 1.8.11 *Un* paramètre d'unipotence *est un couple*

$$\tilde{p} = (\text{caractéristique } p, \text{ degré d'unipotence } d) \in (\{\infty\} \cup \mathcal{P}) \times (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$$

qui satisfait $p < \infty \Leftrightarrow d = \infty$.

Désormais la caractéristique p varie, sauf mention du contraire, dans $\mathcal{P} \cup \{\infty\}$. Si $\tilde{p}$ est de la forme (q, ∞), nous écrirons $U_{\tilde{p}}$ à la place de U_q. Nous avons ainsi défini, pour G un groupe de rang de Morley fini résoluble, $U_{\tilde{p}}(G)$ dans les cas (q, ∞) (voir §1.8.1) et (∞, d) *avec* $d > 0$ (voir §1.8.2). Pour terminer d'uniformiser nous posons suivant [FJ07]

$$U_{(\infty,0)}(G) = \langle \text{sous-tores décents définissables de } G \rangle .$$

Rappelons que d'après la Définition 1.2.5, un tore décent est un groupe abélien divisible de rang de Morley fini qui coïncide avec la clôture définissable de sa torsion.

Définition 1.8.12 *Soient H un groupe connexe et résoluble de rang de Morley fini et $\tilde{p} = (p, d)$ un paramètre d'unipotence.*

- *H* admet *le paramètre d'unipotence $\tilde{p}$ si $U_{\tilde{p}}(H) \neq 1$.*
- *Le paramètre d'unipotence $\tilde{p}$ est* maximal *dans H si $U_{\tilde{p}}(H) \neq 1$ et $d_p(H) = d$.*

Remarque 1.8.13

- *Un paramètre d'unipotence dont la caractéristique est première est toujours un paramètre d'unipotence maximal (puisque d_p n'admet que les deux valeurs "oui" ou "non"). Il n'en va pas de même si la caractéristique est nulle, car on a dans ce cas une notion graduée d'unipotence ("plus" ou "moins").*
- *Bien noter que plusieurs paramètres d'unipotence maximaux sont disponibles pour un même groupe (considérer par exemple $(\overline{\mathbb{F}_2}, +) \times (\overline{\mathbb{F}_3}, +)$). En revanche, une caractéristique fixée apparaît* au plus une fois à l'état maximal.

On peut dire quelque chose des groupes sans unipotence. La notion de bon tore a été présentée dans la Définition 1.2.5.

Fait 1.8.14 ([FJ07, Theorem 2.11], voir aussi [Bur04, Theorem 2.19]) *Soit H un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Si $U_{(p,d)}(H) = 1$ pour chaque paramètre d'unipotence (p, d) tel que $0 < d \leq \infty$, alors H est un bon tore.*

1.8.4 $U_{\tilde{p}}$-groupes

Les faits qui suivent sont triviaux en caractéristique première, et le travail de Burdges dans [Bur04] porte évidemment sur la caractéristique nulle. Nous invoquons dans la suite deux références : [FJ07] et [Bur04]. La première fournit la notation, et la seconde contient les formulations originelles, souvent différentes.

La définition suivante *ne suppose pas* la nilpotence et recoupe bien la définition en caractéristique première *dans le cas résoluble*, cas dont nous ne sortirons pas.

Définition 1.8.15 *Soit $\tilde{p}$ un paramètre d'unipotence. Un groupe de rang de Morley fini G est un* $U_{\tilde{p}}$-groupe *si $G = U_{\tilde{p}}(G)$.*

Remarque 1.8.16 *Un sous-groupe définissable et connexe d'un $U_{\tilde{p}}$-groupe résoluble, où $\tilde{p} = (p, d)$ et $d < \infty$, n'est pas nécessairement un $U_{\tilde{p}}$-groupe. La notion d'homogénéité (Définition 1.8.24 infra) a été introduite pour y remédier.*

Fait 1.8.17 ([FJ07, Lemma 2.13], [Bur04, Lemma 2.12] pour $0 < d < \infty$) *Soit $f : G \to H$ un morphisme définissable entre groupes de rang de Morley fini. Alors*

1. *(push-forward) $f(U_{\tilde{p}}(G)) \leq U_{\tilde{p}}(H)$ est un $U_{\tilde{p}}$-groupe.*
2. *(pull-back) On suppose que le paramètre $\tilde{p}$ n'est pas de la forme (p, ∞), ou que G est résoluble. Si $U_{\tilde{p}}(H) \leq f(G)$, alors $f(U_{\tilde{p}}(G)) = U_{\tilde{p}}(H)$.*

On peut voir le théorème de structure suivant comme une généralisation de la décomposition due à Nesin des groupes nilpotents de rang de Morley fini ([BN94, Theorem 6.8]).

Fait 1.8.18 ([FJ07, Theorem 2.7], [Bur04, Theorem 2.31]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini connexe et nilpotent. Alors*

$$G = [d(S) * U_{(\infty,1)}(G) * \cdots * U_{(\infty,d_\infty(G))}(G)] * [U_2(G) \times \cdots \times U_{q_{max}}(G)],$$

où S est le sous-groupe de torsion divisible de G, $d(S)$ sa clôture définissable, et q_{max} désigne le plus grand nombre premier q tel que $U_q(G)$ soit non-trivial.

La notion de $U_{\tilde{p}}$-groupe est ainsi particulièrement utile dans le contexte nilpotent.

Définition 1.8.19 *Un* $\tilde{p}$-groupe, *$\tilde{p} \neq (\infty, 0)$, est un $U_{\tilde{p}}$-groupe de rang de Morley fini nilpotent. Un* $(\infty, 0)$-groupe *est, toujours par définition, un tore décent.*

La plupart de nos arguments vont reposer sur le fait suivant.

Fait 1.8.20 ([FJ07, Lemma 2.9], [Bur04, Lemma 2.26]) *Soit G un $\tilde{p}$-groupe non-trivial de rang de Morley fini. Alors $U_{\tilde{p}}(Z(G)) \neq 1$.*

Preuve

Ce fait n'apparaissant qu'implicitement dans [FJ07], prouvons-le brièvement. Si G est abélien, c'est évident. Sinon $[Z_2(G), G] \neq 1$, et ce sous-groupe définissable et connexe est central dans G. C'est un $U_{\tilde{p}}$-groupe d'après [FJ07, Lemma 2.9]. □

Fait 1.8.21 ([Bur04, Lemma 3.18]) *Soient G et H deux groupes de rang de Morley fini, H agissant définissablement sur G. On suppose que G est un $\tilde{p}$-groupe définissable sans q-torsion (q est un nombre premier), et que H est un q-groupe d'exposant borné formé d'automorphismes définissables de G. Alors $C_G(H)$ est encore un $\tilde{p}$-groupe.*

Enfin nous introduisons une dernière notation.

Notation 1.8.22 *Pour $\tilde{p} = (\infty, d)$, on note $F_d(H) = U_{\tilde{p}}(F^\circ(H))$.*

Fait 1.8.23 ([Bur04, Theorem 2.21]) *Soient H un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, et $\tilde{p} = (\infty, d_\infty(H))$. Si $d_\infty(H) > 0$, alors $U_{\tilde{p}}(H) \leq F^\circ(H)$. (Ce qu'on peut écrire $U_{\tilde{p}}(H) = F_{d_\infty(H)}(H)$.)*

Ainsi ce qui était vrai en caractéristique première, i.e. le fait de "tomber" dans le sous-groupe de Fitting, ne l'est en caractéristique nulle que pour le sous-groupe "le plus unipotent", au sens de la maximalité du degré d'unipotence.

1.8.5 Homogénéité de Frécon

La notion suivante, introduite par Frécon, est essentielle. Nous renvoyons à [FJ07, §2.8].

Définition 1.8.24 *Un $U_{\tilde{p}}$-groupe G de rang de Morley fini est* $\tilde{p}$-homogène *si chaque sous-groupe définissable connexe nilpotent de G est encore un $U_{\tilde{p}}$-groupe.*

Nous dirons qu'un groupe est *homogène* si pour un certain paramètre d'unipotence $\tilde{p}$, c'est un $U_{\tilde{p}}$-groupe $\tilde{p}$-homogène. Il est clair que si un groupe G non-trivial est à la fois $\tilde{p}$-homogène et $\tilde{q}$-homogène, on a $\tilde{p} = \tilde{q}$, et le paramètre d'unipotence, bien que sous-entendu, est uniquement déterminé. Ce n'est pas le cas pour le groupe trivial $\{1\}$, qui est néanmoins homogène.

Remarque 1.8.25 *La $\tilde{p}$-homogénéité d'un groupe non-trivial de rang de Morley fini G signifie que $\tilde{p}$ est* le seul *paramètre d'unipotence $\tilde{q}$ pour lequel $U_{\tilde{q}}(G) \neq 1$.*

Si $\tilde{p}$ est de la forme (p, ∞), tout $U_{\tilde{p}}$-groupe est $\tilde{p}$-homogène (et d'ailleurs la notion classique de U_p-groupe suppose la nilpotence, rappelons que ce n'est pas le cas de la notion d'unipotence sans torsion). En caractéristique nulle nous aurons besoin du résultat suivant dû à Frécon.

Fait 1.8.26 ([FJ07, Theorem 2.18], cf. [Bur04, Lemma 2.32]) *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini (non nécessairement résoluble). On suppose que G agit définissablement sur un $\tilde{p}$-groupe définissable H. Alors $[G, H]$ est un $\tilde{p}$-sous-groupe $\tilde{p}$-homogène de H.*

1.8.6 $\tilde{p}$-sous-groupes de Sylow

Burdges définit les "$U_{\tilde{p}}$-sous-groupes de Sylow" comme les $U_{\tilde{p}}$-sous-groupes définissables *nilpotents et maximaux* ([Bur04, §4.4]). Par souci de cohérence avec [FJ07] et la Définition 1.8.19, nous les appelons ici *$\tilde{p}$-sous-groupes de Sylow.*

Nous formulons comme suit l'important analogue de la condition de normalisateur.

Fait 1.8.27 ([FJ07, Proposition 2.8], [Bur04, Lemma 2.28]) *Soient G un $\tilde{p}$-groupe de rang de Morley fini et $H < G$ un sous-groupe définissable. Si S_1 est le $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de H et S_2 celui de $N_G(H)$, alors $S_1 < S_2$.*

Fait 1.8.28 ([FJ07, Theorem 5.7], [Bur04, Theorem 4.16]) *Les $\tilde{p}$-sous-groupes de Sylow d'un groupe connexe résoluble de rang de Morley fini sont conjugués.*

Il en résulte un argument de Frattini portant sur les $\tilde{p}$-sous-groupes de Sylow.

Corollaire 1.8.29 ([Bur04, Corollary 4.17]) *Soient H un groupe résoluble de rang de Morley fini, $K \trianglelefteq H$ un sous-groupe définissable connexe, et S un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de K. Alors $H = N_H(S) \cdot K$.*

Par ailleurs on sait préciser la structure des $\tilde{p}$-sous-groupes de Sylow d'un groupe de rang de Morley fini connexe résoluble comme suit.

Fait 1.8.30 ([FJ07, Corollary 5.11], [Bur04, Lemma 4.19]) *Soit H un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Alors les $\tilde{p}$-sous-groupes de Sylow de H sont les sous-groupes de la forme $U_{\tilde{p}}(H') \cdot U_{\tilde{p}}(Q)$, où Q est un sous-groupe de Carter de H.*

1.8.7 Intersections de paires maximales

Une application de l'unipotence de Burdges est l'étude de certaines "intersections maximales" de sous-groupes de Borel dans [Bur07] (cf. [Bur04]).

Précisons la terminologie. La maximalité est au sens *de l'inclusion des composantes connexes* et non du rang. Par définition, deux sous-groupes de Borel B_1 et B_2 distincts seront dits former une *paire maximale* si l'on ne peut pas trouver deux autres sous-groupes de Borel B_3 et B_4 tels que $(B_1 \cap B_2)^\circ < (B_3 \cap B_4)^\circ$.

Il n'est pas a priori évident qu'un sous-groupe de Borel appartienne à au moins une paire maximale. Le fait suivant l'implique (entre autres choses) dans le cas où l'on dispose déjà d'une intersection non-abélienne.

Fait 1.8.31 ([Bur07, Theorem 4.3]) *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal, et B_1, B_2 deux sous-groupes de Borel distincts. On suppose que $H = (B_1 \cap B_2)^\circ$ n'est pas abélien. Alors les faits suivants sont équivalents :*

1. *B_1 et B_2 sont les seuls sous-groupes de Borel contenant H.*
2. *La paire (B_1, B_2) est maximale.*
3. *H est maximal parmi les groupes de la forme $(B_1 \cap B_3)^\circ$, avec B_3 un sous-groupe de Borel distinct de B_1.*
4. *$d_\infty(B_1) \neq d_\infty(B_2)$.*

Fait 1.8.32 ([Bur07, Theorem 4.1, 1.]) *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal, et B_1, B_2 deux sous-groupes de Borel distincts. Soit $H = (B_1 \cap B_2)^\circ$. Alors H' est homogène (éventuellement trivial).*

Fait 1.8.33 ([Bur07, Theorem 4.5]) *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal et (B_1, B_2) une paire maximale avec $d_\infty(B_1) \geq d_\infty(B_2)$. On suppose que $H = (B_1 \cap B_2)^\circ$ est non-abélien et l'on note $r' = d_\infty(H')$. Alors :*

1. *$d_\infty(B_1) > d_\infty(H) = d_\infty(B_2)$ et $N^\circ(H) = H$.*
2. *Tout sous-groupe définissable connexe nilpotent de H est abélien.*
3. *$F_{r'}(H) = U_{(\infty,r')}(H)$ est l'unique (∞, r')-sous-groupe de Sylow de H. Il est inclus dans $F^\circ(B_2)$ et la composante connexe de son normalisateur est incluse dans B_2.*
4. *$F_\ell(B_2) \leq Z(H)$ pour chaque $\ell \neq r'$, et $F_{r'}(B_2)$ est non-abélien. (En particulier $F_\ell(B_2)$ est non-abélien si et seulement si $\ell = r'$.)*
5. *Les sous-groupes de Carter de H sont des sous-groupes de Carter de B_1, et la composante connexe de leur normalisateur est incluse dans B_2.*
6. *$F_{r'}(B_1) = F(B_1) \cap F(B_2)$ est (∞, r')-homogène, et B_1 est l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(F_{r'}(B_1))$.*
7. *$F^\circ(B_1)$ et $F^\circ(B_2)$ sont divisibles.*

On remarquera que le point 2. de ce fait implique entre autres le

Corollaire 1.8.34 *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal. Soit K un sous-groupe définissable, connexe, et nilpotent* non-abélien. *Alors K est inclus dans un* unique *sous-groupe de Borel de G.*

1.9 Groupes simples connexes minimaux et unipotence

Nous revenons à présent sur la notion d'unipotence en caractéristique nulle. Notre objectif est de contrôler au mieux les intersections de sous-groupes de Borel. Les Faits 1.8.3 et 1.8.7 permettent un tel contrôle grâce à un radical (U_p et O, respectivement) que l'on peut penser comme "pesant".

Ce qui empêche une traduction naïve *en caractéristique nulle* de ces résultats baptisés "lemmes de Jaligot", est la possibilité qu'a le degré d'unipotence d'augmenter. Cela correspond au fait que la caractéristique nulle recouvre plusieurs comportements, et qu'il y a plusieurs façons pour un groupe sans torsion d'être unipotent. Les hypothèses du Lemme 1.9.1 ci-après limitent le phénomène de "fuite du degré d'unipotence" et permettent d'énoncer un troisième "lemme de Jaligot".

Ainsi l'unipotence sans torsion opère-t-elle de manière assez similaire à la p-unipotence ; sous des hypothèses naturelles, les deux théories sont analogues. Notons que la conclusion du Lemme 1.8.5 peut se paraphraser en : "$U_p(B)$ est l'unique U_p-sous-groupe maximal contenant A".

Lemme 1.9.1 *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal. Soit B un sous-groupe de Borel de G, de paramètre d'unipotence* maximal $\tilde{p} = (\infty, d_\infty(B))$ avec $d_\infty(B) > 0$. *Soit U un $\tilde{p}$-sous-groupe définissable de B contenant un sous-groupe $A \neq 1$ tel que $d_\infty(C^\circ(A)) \leq d_\infty(B)$.*

Alors $U_{\tilde{p}}(B) = F_{d_\infty(B)}(B)$ est un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G, et c'est le seul qui contienne U. Enfin B est l'unique sous-groupe de Borel de paramètre d'unipotence maximal $\tilde{p}$ *qui contienne U.*

Remarque 1.9.2 *D'un point de vue formel, l'hypothèse faite sur A est toujours satisfaite en caractéristique première. L'énoncé suggéré est donc naturel. Noter aussi que A n'est pas nécessairement un $U_{\tilde{p}}$-groupe lui-même, ni même définissable !*

Preuve

Remarquons que $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \neq 1$ implique $d_\infty(C^\circ(A)) \geq d_\infty(B)$. On a donc égalité. D'autre part on garde à l'esprit que comme les $U_{\tilde{p}}$-groupes sont par définition connexes, toute inclusion stricte sera d'indice infini. Enfin, d'après le Fait 1.8.23, on a bien $U_{\tilde{p}}(B) = F_{d_\infty(B)}(B)$.

Nous prouvons que $U_{\tilde{p}}(B)$ est un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G. Soit $U_1 \geq U_{\tilde{p}}(B)$ un $\tilde{p}$-sous-groupe de G. Si l'inclusion est stricte, la condition de normalisateur 1.8.27 dans U_1 implique $U_{\tilde{p}}(N^\circ_{U_1}(U_{\tilde{p}}(B))) > U_{\tilde{p}}(B)$. Mais comme $N^\circ(U_{\tilde{p}}(B)) = B$, on a $U_{\tilde{p}}(N^\circ_{U_1}(U_{\tilde{p}}(B))) \leq B$, et donc $U_{\tilde{p}}(N^\circ_{U_1}(U_{\tilde{p}}(B))) \leq U_{\tilde{p}}(B)$, ce qui est une contradiction. Ainsi $U_{\tilde{p}}(B) = U_1$, et $U_{\tilde{p}}(B)$ est bien un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G.

Nous montrons désormais qu'il est le seul à contenir U. Soit U_1 un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G *distinct de* $U_{\tilde{p}}(B)$, contenant U, et maximisant le rang de $X = U_{\tilde{p}}(U_1 \cap U_{\tilde{p}}(B)) \geq U$. On a $X < U_1$, car sinon $U_1 = X \leq U_{\tilde{p}}(B)$ et $U_1 = U_{\tilde{p}}(B)$ par maximalité de U_1, contre la définition de U_1. D'autre part $X < U_{\tilde{p}}(B)$, car sinon $U_{\tilde{p}}(B) \leq U_1$, et comme $U_{\tilde{p}}(B)$ est un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G, on a égalité, contradiction.

Soit $N = N^\circ(X)$. Comme $X \leq N$, on a $d_\infty(N) \geq d_\infty(X) = d_\infty(B)$. Nous montrons l'égalité $d_\infty(N) = d_\infty(B)$. Sinon $d_\infty(N) > d_\infty(B)$, et alors X et $U_\infty(N)$ sont de degrés d'unipotence distincts. Comme ils se normalisent l'un l'autre, leur produit est nilpotent. La décomposition centrale du Fait 1.8.18 implique alors $[X, U_\infty(N)] = 1$. En particulier $U_\infty(N) \leq C^\circ(X) \leq C^\circ(A)$ dont le degré d'unipotence n'excède pas $d_\infty(B)$ par hypothèse, une contradiction. Ainsi $d_\infty(B) = d_\infty(N)$.

$U_{\tilde{p}}(N) \leq F^\circ(N)$ est donc un $\tilde{p}$-groupe d'après le Fait 1.8.23. Nous montrons qu'il n'est pas inclus dans $U_{\tilde{p}}(B)$. Comme $X < U_1$, la condition de normalisateur 1.8.27 dans U_1 entraîne que $X < U_{\tilde{p}}(N^\circ_{U_1}(X)) \leq U_{\tilde{p}}(U_1 \cap U_{\tilde{p}}(N))$. En particulier, la définition de X implique que $U_{\tilde{p}}(N)$ n'est pas inclus dans $U_{\tilde{p}}(B)$.

Soit U_2 un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{p}}(N)$. La condition de normalisateur 1.8.27 appliquée à $X < U_{\tilde{p}}(B)$ impose $X < U_{\tilde{p}}(N^\circ_{U_{\tilde{p}}(B)}(X)) \leq U_{\tilde{p}}(U_{\tilde{p}}(N) \cap U_{\tilde{p}}(B)) \leq U_{\tilde{p}}(U_2 \cap U_{\tilde{p}}(B))$, une contradiction à la maximalité de X qui définit U_1. Notre première affirmation est prouvée.

Il reste à prouver la deuxième affirmation. Si B_1 est un sous-groupe de Borel de paramètre d'unipotence maximal $\tilde{p}$ et qui contient U, alors d'après le Fait 1.8.23, $U \leq U_{\tilde{p}}(B_1)$ qui est un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G. Il vient $U_{\tilde{p}}(B_1) \leq U_{\tilde{p}}(B)$, et la maximalité implique l'égalité. Enfin $B = N^\circ(U_{\tilde{p}}(B)) = N^\circ(U_{\tilde{p}}(B_1)) = B_1$. □

Remarque 1.9.3 *Dans la preuve ci-dessus, on considère le sous-groupe $U_{\tilde{p}}(U_{\tilde{p}}(N) \cap U_{\tilde{p}}(B))$ faute d'homogénéité a priori de $U_{\tilde{p}}(B)$ (voir Définition 1.8.24).*

Corollaire 1.9.4 *Sous les hypothèses du Lemme 1.9.1, on a $N(U) \leq N(B)$.*

Preuve

$N(U) \leq N(U_{\tilde{p}}(B)) \leq N(N^\circ(U_{\tilde{p}}(B))) = N(B)$. □

Remarque 1.9.5 *Le Lemme 1.9.1 et son Corollaire 1.9.4 seront souvent employés avec $A \trianglelefteq B$, et plus particulièrement avec $A = U = U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$.*

En effet si $A \trianglelefteq B$ (et bien sûr toujours si $1 < A \leq U_{\tilde{p}}(B)$), on a $C^\circ(A) \leq B$, et donc $d_\infty(C^\circ(A)) \leq d_\infty(B)$. Nous sommes alors sous les hypothèses du Lemme 1.9.1.

1.10 Groupes simples connexes minimaux et intersections de paires maximales

Revenons aux intersections de paires maximales de §1.8.7 ; d'abord un résultat d'homogénéité.

Lemme 1.10.1 *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal, et $B \neq B^g$ deux conjugués distincts d'un sous-groupe de Borel B. On suppose que $F(B) \cap F(B^g)$ n'est pas homogène. Alors $F^\circ(B)$ est abélien.*

Preuve
D'après le Fait 1.8.4 $F(B) \cap F(B^g)$ est sans torsion. En particulier il est connexe, ainsi que tous ses sous-groupes définissables. Notamment $F(B) \cap F(B^g) = F^\circ(B) \cap F^\circ(B^g) = (F(B) \cap F(B^g))^\circ \neq 1$ (rappelons que le groupe trivial est homogène).

On a $U_p(B) = 1$ pour chaque nombre premier p. En effet si cela est faux pour un p, le Fait 1.8.3 implique alors que $F(B) \cap F(B^g) = 1$, une contradiction.

D'après le Fait 1.8.18 et avec la Notation 1.8.22, $F^\circ(B)$ est alors le produit central des $F_d(B)$ avec $d \geq 1$, et du sous-groupe abélien $d(S)$, clôture définissable du sous-groupe de torsion divisible de $F^\circ(B)$.

L'hypothèse que $F(B) \cap F(B^g)$ n'est pas homogène intervient maintenant. Il existe deux paramètres d'unipotence *distincts* $\tilde{p} = (\infty, d_1)$ et $\tilde{q} = (\infty, d_2)$ apparaissant dans $F^\circ(B) \cap F^\circ(B^g)$. Soit alors U_1 (resp. U_2) un (∞, d_1)-sous-groupe de Sylow (resp. (∞, d_2)-sous-groupe de Sylow) non-trivial de $F^\circ(B) \cap F^\circ(B^g)$.

Soit B_1 un sous-groupe de Borel contenant $N^\circ(U_1)$. Alors, toujours d'après la décomposition centrale du Fait 1.8.18, $F_\ell(B) \leq B_1$ pour chaque $\ell \neq d_1$. Si $B_1 \neq B$, alors le Corollaire 1.8.34 implique que les $F_\ell(B)$ sont abéliens pour $\ell \neq d_1$. Si $B_1 = B$, alors $B_1 \neq B^g$, et l'on trouve de même que les $F_\ell(B^g)$ sont abéliens. Ainsi tous les sous-groupes de la forme $F_\ell(B)$ avec $\ell \neq d_1$ sont abéliens.

On recommence l'argument précédent avec un sous-groupe de Borel contenant $N^\circ(U_2)$, et cela prouve que tous les sous-groupes de la forme $F_\ell(B)$ avec $\ell \neq d_2$ sont abéliens. Ainsi tous les sous-groupes $F_\ell(B)$ avec $\ell \geq 1$ sont abéliens. C'est aussi le cas de $d(S)$. Comme les produits dans la décomposition du Fait 1.8.18 sont centraux, le groupe $F^\circ(B)$ est abélien. $\square$

Lemme 1.10.2 *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal. Soient B_1 et B_2 deux sous-groupes de Borel distincts. On suppose que (B_1, B_2) est une paire maximale, et que $H = (B_1 \cap B_2)^\circ$ n'est pas abélien. Soient $r' = d_\infty(H')$ et Q un sous-groupe de Carter de H. Alors $Q_{r'} := U_{(\infty,r')}(Q)$ est non-trivial, central dans H, et des trois cas suivants un et un seul se produit.*
- $N_G^\circ(Q_{r'}) = H$.
- $N_{B_1}^\circ(Q_{r'}) > H$, de plus $N_{B_2}^\circ(Q_{r'}) = H$ et B_1 est l'unique sous-groupe de Borel contenant $N_G^\circ(Q_{r'})$.
- $N_{B_2}^\circ(Q_{r'}) > H$, de plus $N_{B_1}^\circ(Q_{r'}) = H$ et B_2 est l'unique sous-groupe de Borel contenant $N_G^\circ(Q_{r'})$.

Preuve
La non-trivialité de $Q_{r'}$ est prouvée dans [Bur07, Lemma 3.23], où il est également établi que $Q_{r'} = U_{(\infty,r')}(Z(H))$. On a donc $H \leq N^\circ(Q_{r'})$. La trichotomie résulte alors du fait que B_1 et B_2 sont les seuls sous-groupes de Borel contenant H d'après le Fait 1.8.31. La maximalité de H fait tout le reste. $\square$

Bien remarquer que cet énoncé est symétrique, en ce qu'il ne suppose pas "de quel côté penche l'unipotence" (avec une inégalité comme $d_\infty(B_1) > d_\infty(B_2)$). C'est ce qui le distingue par exemple du Fait 1.8.33 (5), qui suppose $d_\infty(B_1) > d_\infty(B_2)$.

Le lemme suivant est une annexe importante au Fait 1.8.33 qui n'est pas explicite dans [Bur07].

Lemme 1.10.3 *Mêmes hypothèses et notations que dans le Lemme 1.10.2. On suppose en outre que $d_\infty(B_1) > d_\infty(B_2)$. Alors tout (∞, r')-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{(\infty,r')}(H)$ est inclus dans B_2.*

Preuve
Soit U_2 un (∞, r')-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{(\infty,r')}(H)$. On peut supposer que $U_{(\infty,r')}(H) < U_2$, si bien que $U_{(\infty,r')}(H) < U_{(\infty,r')}(N^\circ_{U_2}(U_{(\infty,r')}(H)))$ d'après le Fait 1.8.27.

Si $U_{(\infty,r')}(N^\circ_{U_2}(U_{(\infty,r')}(H)))$ est abélien, alors il centralise $U_{(\infty,r')}(H)$. Avec le Fait 1.8.33 (6), il vient $U_{(\infty,r')}(N^\circ_{U_2}(U_{(\infty,r')}(H))) \leq B_1$. D'autre part le Fait 1.8.33 (3) impose $N^\circ(U_{(\infty,r')}(H)) \leq B_2$. On en déduit $U_{(\infty,r')}(N^\circ_{U_2}(U_{(\infty,r')}(H))) \leq H$, d'où $U_{(\infty,r')}(N^\circ_{U_2}(U_{(\infty,r')}(H))) \leq U_{(\infty,r')}(H)$, c'est une contradiction.

Donc le groupe $U_{(\infty,r')}(N^\circ_{U_2}(U_{(\infty,r')}(H)))$ n'est pas abélien, et il est inclus dans un *unique* sous-groupe de Borel B_0 d'après le Corollaire 1.8.34. Nous avons déjà dit que $N^\circ(U_{(\infty,r')}(H)) \leq B_2$ d'après le Fait 1.8.33 (3). En particulier $B_0 = B_2$, et donc $U_2 \leq B_2$. $\square$

Le lemme suivant était remarqué à la fin de [Bur07, §3.3].

Lemme 1.10.4 *Mêmes hypothèses et notations que dans le Lemme 1.10.2. On suppose en outre que $d_\infty(B_1) > d_\infty(B_2)$. Si Q est sous-groupe de Carter de B_1 et de B_2, alors $U_{(\infty,r')}(B_2) = F_{r'}(B_2)$ est l'unique (∞, r')-sous-groupe de Sylow de B_2.*

Preuve
D'après les Faits 1.7.4 et 1.8.33 (3), le (∞, r')-groupe $U_{(\infty,r')}(B'_2) \cdot U_{(\infty,r')}(Q)$ est inclus dans $F_{r'}(B_2)$. Mais d'après le Fait 1.8.30, $U_{(\infty,r')}(Q) \cdot U_{(\infty,r')}(B'_2)$ est un (∞, r')-sous-groupe de Sylow de B_2. On a donc l'égalité, et $F_{r'}(B_2)$ est un (∞, r')-sous-groupe de Sylow de B_2.

Maintenant la conjugaison de tels sous-groupes, Fait 1.8.28, et $F_{r'}(B_2) \trianglelefteq B_2$ prouvent que $F_{r'}(B_2)$ est l'*unique* (∞, r')-sous-groupe de Sylow de B_2. En particulier $U_{(\infty,r')}(B_2) = F_{r'}(B_2)$. $\square$

Chapitre 2

Snakes & Ladders

Snakes and Ladders est un jeu de pions assez populaire outre-Manche ; certaines cases portent un serpent, qui renvoie le joueur plus bas sur le plateau ; d'autres munies d'échelles le rapprochent du sommet.

Beaucoup de preuves utilisent de tels serpents, et quelques-unes des échelles. En effet l'enjeu de résultats comme le Lemme 1.9.1 ou l'imposant Fait 1.8.33, est de garantir certaines *rigidités*, au sens de l'unicité d'un sous-groupe parmi l'ensemble de ses conjugués. Il est alors souvent fructueux de délaisser l'action d'un groupe sur un autre, au profit de l'action sur un sous-groupe (serpent), ou un sur-groupe (échelle), qui jouirait d'une propriété d'unicité.

2.1 Serpents

Dans cette section nous établissons des résultats de normalisation de sous-groupes remarquables. La question typique est la suivante : si un sous-groupe K normalise un groupe H, K normalise-t-il des sous-groupes "intéressants" de H ? De façon équivalente, un H-conjugué de K va-t-il normaliser un sous-groupe remarquable donné ? "Intéressant" ou "remarquable" ici signifie de l'un des types suivants : p-sous-groupe de Sylow, sous-groupe de Carter, $\tilde{q}$-sous-groupe de Sylow.

2.1.1 p-sous-groupes de Sylow

Lemme 2.1.1 *Soient G un groupe de rang de Morley fini, $K \leq G$ un 2-groupe définissable agissant sur un sous-groupe définissable $H \leq G$, et S un 2-sous-groupe de Sylow de H. Alors un H-conjugué de K normalise S.*

Preuve

Soit $\hat{H} = H \cdot K$. On inclut S dans un 2-sous-groupe de Sylow S_1 de $\hat{H}$. Alors $S = S_1 \cap H \trianglelefteq S_1$. Soit S_2 un 2-sous-groupe de Sylow de $\hat{H}$ contenant K. Par conjugaison des 2-sous-groupes de Sylow d'un groupe de rang de Morley fini, Fait 1.3.7, il existe un élément $\hat{h}$ de $\hat{H}$ tel que $K^{\hat{h}} \leq S_2^{\hat{h}} = S_1$. Il est clair que $K^{\hat{h}}$ est un H-conjugué de K. Comme $S \trianglelefteq S_1$, on a bien que $K^{\hat{h}}$ normalise S. □

Lemme 2.1.2 *Soient G un groupe de rang de Morley fini* sans p-unipotence*, $K \leq G$ un p-groupe définissable agissant sur un sous-groupe définissable $H \leq G$, et S un p-sous-groupe de Sylow de H. Alors un H-conjugué de K normalise S.*

Preuve

Même preuve que pour le Lemme 2.1.1, en remplaçant 2 par p. En effet les groupes de rang de Morley fini sans p-unipotence conjuguent leurs p-sous-groupes de Sylow d'après le Fait 1.4.6. □

2.1.2 Sous-groupes de Carter

Lemme 2.1.3 *Soient H un groupe de rang de Morley fini et $N \triangleleft H$ un sous-groupe définissable, normal, et* sans involution*. On suppose que H/N contient un 2-sous-groupe K. Alors H aussi contient un 2-sous-groupe isomorphe à K.*

Preuve

Evident, puisque si S est un 2-sous-groupe de Sylow de H, alors $SN/N \simeq S/(S \cap N)$, où l'intersection est triviale. $\square$

Corollaire 2.1.4 *Soit G un groupe de rang de Morley fini* de type impair ou dégénéré*. Soit $K \leq G$ un* 2*-sous-groupe* définissable *agissant sur un sous-groupe définissable, connexe et résoluble H, et Q un sous-groupe de Carter de H. Alors un H-conjugué de K normalise Q.*

Preuve

Supposons d'abord que H soit sans involution ; H et K sont alors disjoints. On forme $\hat{H} = H \rtimes K$ et la projection $\pi_H : \hat{H} \to \hat{H}/H \simeq K$. Un argument de Frattini implique $\hat{H} = H \cdot N_{\hat{H}}(Q)$; en particulier $\pi_H(N_{\hat{H}}(Q)) \simeq K$. D'après le Lemme 2.1.3, $N_{\hat{H}}(Q)$ contient une copie K_1 de K. Mais K_1 est un 2-sous-groupe de Sylow de $\hat{H}$, il est donc conjugué à K par un élément de $\hat{H}$ que l'on peut supposer dans H. Ceci prouve l'affirmation dans ce premier cas.

Nous supposons maintenant que H a des involutions. En type impair, d'après le Fait 1.5.3, il existe un 2-sous-groupe de Sylow S inclus dans Q. Ce 2-sous-groupe de Sylow est un 2-tore d'après le Fait 1.4.4. On peut supposer que K normalise S d'après le Lemme 2.1.1. Maintenant $Q \leq C^\circ(S)$ qui est K-invariant. Quitte à travailler dans $C^\circ(S)$, on peut donc supposer que le 2-tore S est central dans H, et la clôture définissable $d(S)$ est encore dans $Z(H)$. Nous passons alors au quotient par $d(S) \leq Q$. Le groupe $Q \cdot d(S)/d(S)$ est un sous-groupe de Carter de $H/d(S)$. Ce dernier n'a pas d'involution, et l'on peut donc supposer que K normalise Q modulo $d(S)$. Mais $d(S) \leq Q$, et donc K normalise Q. $\square$

Nous n'avons utilisé aucune propriété spécifique aux 2-tores. On peut donc, grâce au Fait 1.4.6, procéder à l'identique s'il n'y a pas de p-unipotence (cette hypothèse doit figurer aussi dans l'analogue qu'on formulerait au Lemme 2.1.3).

Corollaire 2.1.5 *Soit G un groupe de rang de Morley fini* sans p-unipotence*. Soit $K \leq G$ un p-sous-groupe* définissable *agissant sur un sous-groupe définissable, connexe et résoluble H, et Q un sous-groupe de Carter de H. Alors un H-conjugué de K normalise Q.*

2.1.3 $\tilde{q}$-sous-groupes de Sylow

Corollaire 2.1.6 *Soit G un groupe de rang de Morley fini sans p-unipotence. Soit $K \leq G$ un p-sous-groupe définissable agissant sur un sous-groupe définissable, connexe et résoluble H, et U un $\tilde{q}$-sous-groupe de Sylow de H. Alors un H-conjugué de K normalise U.*

Preuve

D'après le Fait 1.8.30 qui décrit la structure des $\tilde{q}$-sous-groupes de Sylow d'un groupe connexe résoluble, il existe un sous-groupe de Carter Q de H tel que $U = U_{\tilde{q}}(H') \cdot U_{\tilde{p}}(Q)$. Le Corollaire 2.1.5 implique qu'il existe un H-conjugué de K, disons K_1, qui normalise Q, et donc $U_{\tilde{q}}(Q)$. D'autre part K_1 normalise H, donc il normalise $U_{\tilde{q}}(H')$. Ainsi K_1 normalise U. $\square$

Le Lemme 2.1.1, les Corollaires 2.1.5 et 2.1.6 seront utilisés surtout avec $K = \langle w \rangle$, sous-groupe engendré par une involution.

2.2 Echelles

Nous étudions désormais une propriété complémentaire aux résultats établis dans la section précédente, à savoir un principe d'*extension*. On s'interroge sur l'existence, pour un sous-groupe T définissable invariant par un groupe K, d'un sous-groupe "intéressant" du groupe ambiant qui soit K-invariant et qui contienne T. Donner un contenu au mot "intéressant" requiert des restrictions sur le groupe ambiant. En effet, trouver un sous-groupe du groupe ambiant qui soit quasi-autonormalisant et K-invariant est trivial, en itérant le normalisateur connexe. Pour donner un sens à la recherche de sur-groupe K-invariant, on adopte le contexte simple connexe minimal, et la question devient celle de l'existence de sous-groupes de Borel K-invariants.

Nous ne pourrons pas apporter de solution nette à une aussi vaste question. En revanche, nous formulerons une réponse positive si le groupe K est engendré par des involutions, *à moins que le groupe ambiant ne soit* PSL_2 ! Cette caractérisation inattendue sera énoncée dans le Théorème 4.3.4 de la Section 4.3 du chapitre 4. Elle requiert non seulement le Théorème 3.0.1 du chapitre 3, mais d'autres propriétés des involutions en rang de Prüfer égal à 2.

Pour le moment nous commençons cette étude par des généralités, et passerons assez vite au cas où $K = \langle w \rangle$ est engendré par une involution. L'étude générale reprendra en §4.3.

2.2.1 Enoncé et réduction

Soient G un groupe de rang de Morley fini *simple connexe minimal* et K un sous-groupe *quelconque* de G. Pour un sous-groupe $1 < T < G$ (non-trivial propre) définissable connexe K-invariant, on s'intéresse à la propriété

K**-échelle** : T peut être inclus dans un sous-groupe de Borel K-invariant.

Plus précisément, nous nous intéresserons à d'éventuels contre-exemples.

Remarque 2.2.1 *La définissabilité de T ne semble pas nécessaire pour que la K-échelle fasse sens, et pourtant il faut la connexité pour que la notion de sous-groupe de Borel puisse intervenir. Si T n'est pas connexe, la question est beaucoup trop générale ; elle exige de savoir si tout élément appartient à un sous-groupe connexe !*

Nous allons opérer une réduction du problème général ; mais en §2.2.3 nous considérerons un cas très particulier.

Lemme 2.2.2 *On peut supposer que K est fini modulo T.*

Preuve
Commençons par travailler avec $d(K)$. En effet $T \cdot K$ est un contre-exemple $\Leftrightarrow T \cdot d(K)$ en est un. On peut donc dans un premier temps supposer K définissable.

Soit $T_1 = T \cdot d^\circ(K)$, encore définissable, connexe, propre, et K-invariant. Alors $T \cdot K$ est un contre-exemple $\Leftrightarrow T_1 \cdot K$ en est un, et cette nouvelle paire de sous-groupes est conforme à l'énoncé du lemme. □

Lemme 2.2.3 *Tout groupe de rang de Morley fini H admet une écriture $H = H^\circ \cdot \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, où les x_i sont des p_i-éléments.*

Preuve
Un groupe *fini* est engendré par tous ses p-éléments (pour tout p), cela se montre par récurrence. Si le groupe est simple, le sous-groupe engendré, étant caractéristique, coïncide avec le groupe ambiant. Sinon, on a un sous-groupe normal, engendré par ses p-éléments, et le quotient est engendré par ses p-éléments. Il suffit alors de "relever la torsion". (Nous n'invoquons pas le Fait 1.4.1 dans le cas particulier d'un groupe fini ; bien plutôt, nous disons que le Fait 1.4.1 n'est que la généralisation immédiate au cas des groupes de rang de Morley fini d'une propriété des groupes finis. Cette remarque nous semble très conforme à l'esprit du programme de Borovik.)

Le groupe H/H° fini est ainsi engendré par un nombre fini de p-éléments, que l'on relève en p-éléments de H grâce au fait 1.4.1. □

Lemme 2.2.4 *On peut supposer que K (toujours fini modulo T) est un groupe de type fini et engendré par des p-éléments.*

Preuve
K est par hypothèse fini modulo T. Comme au début du Lemme 2.2.2, on peut supposer provisoirement que K est définissable ; il reste fini modulo T. D'après le Lemme 2.2.3, il existe des p-éléments (p varie) $x_1, \ldots, x_n$ tels que $K = K^\circ \cdot \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Posons $T_1 = T \cdot K^\circ$, encore propre, définissable, connexe, et K_1-invariant, où $K_1 = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ a la forme annoncée. Maintenant $T \cdot K$ est un contre-exemple $\Leftrightarrow T_1 \cdot K_1$ en est un. □

Remarque 2.2.5 *Attention, la définissabilité de K n'intervient dans les preuves des Lemmes 2.2.2 et 2.2.4 qu'à titre provisoire ; on préfère in fine travailler avec un groupe K de type fini. Ce dernier est très vraisemblablement non-définissable s'il est infini d'après le lemme suivant.*

Lemme 2.2.6 *S'il existe un groupe de rang de Morley fini infini de type fini, alors la conjecture d'algébricité est fausse.*

Preuve
Par induction, on montre qu'il existe un tel groupe simple : soit K un groupe de rang de Morley fini infini de type fini, et minimal en rang et en degré. Tout sous-groupe L d'indice fini dans K est encore de type fini ; rappelons pourquoi. Soient $S_K = \{k_1, \ldots, k_n\}$ un ensemble de générateurs de K stable par inversion, et a_i des représentants des classes à gauche modulo L tels que 1 représente L. Nous disons que L est engendré par ceux parmi les $a_i^{-1}k_r a_j$ qui sont dans L. Soit $S_L = L \cap \{a_i^{-1}k_r a_j\}_{i,j,r}$, clairement fini. Si $\ell \in L$, alors il existe des indices $i_1, \ldots, i_m$ tels que $\ell = k_{i_1} \ldots k_{i_m}$. Pour chaque $2 \leq p \leq m$, il existe un indice j_p et un élément ℓ_p de L tels que $k_{i_p} \ldots k_{i_m} = a_{j_p}\ell_p$. Il vient alors

$$\begin{aligned}
\ell &= k_{i_1} \ldots k_{i_m} = \underbrace{k_{i_1}a_{j_2}}_{\in S_L}\ell_2 = (k_{i_1}a_{j_2})\underbrace{a_{j_2}^{-1}k_{i_2}a_{j_3}}_{\in S_L}\ell_3 \\
&= \ldots \\
&= (k_{i_1}a_{j_2})\left(a_{j_2}^{-1}k_{i_2}a_{j_3}\right)\ldots\left(a_{j_{m-2}}^{-1}k_{i_{m-2}}a_{j_{m-1}}\right)\underbrace{a_{j_{m-1}}^{-1}k_{i_{m-1}}a_{j_m}}_{\in S_L}\ell_m \\
&= (k_{i_1}a_{j_2})\left(a_{j_2}^{-1}k_{i_2}a_{j_3}\right)\ldots\left(a_{j_{m-1}}^{-1}k_{i_{m-1}}a_{j_m}\right)\underbrace{a_{j_m}^{-1}k_{i_m}}_{\in S_L},
\end{aligned}$$

et S_L engendre bien L.

En particulier K° est encore de type fini, et par minimalité K est connexe. Maintenant s'il existe $N \lhd K$ normal définissable infini propre, alors K/N est de rang moindre et toujours infini de type fini. Par minimalité, K ne possède aucun sous-groupe normal définissable infini propre. Si K a un centre (alors nécessairement fini), on le factorise, et K n'a plus de centre d'après le Fait 1.7.2. Notamment K qui est connexe n'a pas de sous-groupe normal définissable. Si maintenant $N \lhd K$ est un sous-groupe normal propre quelconque, alors le groupe $[K, N] \leq N$ est propre, définissable, connexe, et normal, donc trivial. Ainsi $N \leq Z(K) = 1$. K est donc simple.

K ne peut pas être un groupe simple algébrique sur un corps algébriquement clos : en effet d'après un résultat de Kramer, Röhrle et Tent, un tel groupe ré-interprète son corps de base, disons $\mathbb{F}_1$. Mais $\mathbb{F}_1$ doit alors être de type fini en tant qu'anneau sur son sous-corps premier $\mathbb{F}_0$. Il est pourtant clair que si $\mathbb{F}_1 = \mathbb{F}_0[a_1, \ldots a_n]$ est algébriquement clos, alors les a_i ne sont pas transcendants sur $\mathbb{F}_0$ et donc que $[\mathbb{F}_1 : \mathbb{F}_0] < \infty$. Comme $\mathbb{F}_0$ est un corps premier, $\mathbb{F}_1$ ne peut être algébriquement clos, une contradiction. K est ainsi un contre-exemple à la conjecture de Cherlin-Zilber. □

La conclusion de cette discussion est que d'après le Lemme 2.2.4, le problème de la K-échelle se ramène en général au cas où K est un sous-groupe de type fini, engendré par des p_i-éléments, et fini modulo T.

2.2.2 Sous-groupe de Carter

Les lemmes suivants sont vrais en partant de K quelconque.

Lemme 2.2.7 *Un contre-exemple à la K-échelle est sans p-unipotence.*

Preuve
Soit en effet T un contre-exemple à la K-échelle. Si T possède de la p-unipotence, alors d'après le Lemme 1.8.5 il est inclus dans un unique sous-groupe de Borel, qui est nécessairement K-invariant. □

Lemme 2.2.8 *Un contre-exemple* maximal *à la K-échelle est maximal parmi les sous-groupes propres définissables connexes K-invariants.*

Preuve

Soit T un contre-exemple maximal à la K-échelle. Soit $H \geq T$ un sous-groupe (propre) définissable, connexe, K-invariant et maximal pour ces propriétés. Si H pouvait s'inclure dans un sous-groupe de Borel K-invariant, T ne serait pas un contre-exemple à la K-échelle. Donc H est un contre-exemple, et la maximalité de T en tant que contre-exemple implique $H = T$. □

Corollaire 2.2.9 *Soit T un contre-exemple* maximal *à la K-échelle. Si $1 \neq T_0 \trianglelefteq T$ est un sous-groupe définissable normal et K-invariant, alors $T = N^\circ(T_0)$.*

Ce résultat implique en particulier que si T est un contre-exemple maximal à la K-échelle, alors K est fini modulo T (cf. Lemme 2.2.2).

Lemme 2.2.10 *Un contre-exemple à la K-échelle est abélien.*

Preuve

Soit T un contre-exemple non-abélien à la K-échelle. On peut supposer que T est un contre-exemple *maximal* à la K-échelle (il reste non-abélien). On a notamment $T = N^\circ(T')$ d'après le Corollaire 2.2.9.

Soit $B \geq T$ un sous-groupe de Borel quelconque. B n'est pas abélien, donc pas un bon tore. En particulier d'après le Fait 1.8.14, il existe un paramètre d'unipotence "non-trivial" pour B, c'est-à-dire un $\tilde{p} \neq (\infty, 0)$ tel que $U_{\tilde{p}}(B) \neq 1$. Nous supposons que ce paramètre d'unipotence est *maximal* pour B, de sorte que $U_{\tilde{p}}(B) \leq F^\circ(B)$ d'après le Fait 1.8.23.

D'après le Fait 1.7.4 $T' \leq F^\circ(B)$, et donc $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \leq C^\circ(T') \leq N^\circ(T') = T$. Ainsi T admet le même paramètre d'unipotence *maximal* $\tilde{p}$ que B et $1 \neq U_{\tilde{p}}(T) \leq U_{\tilde{p}}(B)$. Si l'inclusion est stricte, la condition de normalisateur donne une contradiction au Corollaire 2.2.9. Il vient ainsi $U_{\tilde{p}}(T) = U_{\tilde{p}}(B)$ et $B = N^\circ(U_{\tilde{p}}(T)) = T$ toujours d'après le Corollaire 2.2.9. Donc T est lui-même un sous-groupe de Borel K-invariant, une contradiction. □

Corollaire 2.2.11 *Soit T un contre-exemple* maximal *à la K-échelle. Si $1 \neq T_0 \leq T$ est un sous-groupe définissable K-invariant, alors $T = N^\circ(T_0)$.*

Corollaire 2.2.12 *Un contre-exemple* maximal *à la K-échelle est un sous-groupe de Carter abélien de G. En outre si T_0 est un contre-exemple (non nécessairement maximal) à la K-échelle, alors $N^\circ(T_0)$ est un contre-exemple maximal.*

2.2.3 $\langle w \rangle$-échelle

Nous nous arrêtons ici pour l'étude générale, qui reprendra dans la section 4.3 du chapitre 4 avec des outils plus récents, notamment la conjugaison des sous-groupes de Carter. Nous voulons désormais préparer un premier résultat sur PSL_2 (le Corollaire 3.0.2 infra) en utilisant le moins de technologie possible.

PSL_2 marque l'esprit par son 2-tore que normalise une involution, sans qu'on puisse inclure *le tout* dans un sous-groupe de Borel. A terme, nous allons montrer qu'une telle configuration caractérise bien PSL_2 parmi les groupes simples connexes minimaux. Cela nécessite de pousser plus avant l'étude de la $\langle w \rangle$-invariance.

Dorénavant, G est de type impair et $K = \langle w \rangle$ pour une involution *torique* w de G.

D'après le Fait 1.4.5, l'hypothèse de toricité de l'involution est toujours vérifiée. Cela ne sera pas invoqué ici, et nous mènerons pareillement toute l'analyse du chapitre 3 sans en faire usage.

Lemme 2.2.13 *Un contre-exemple à la $\langle w \rangle$-échelle est inversé par w.*

Preuve

Soit T un contre-exemple à la $\langle w\rangle$-échelle, que l'on peut supposer maximal. Soit également $T_0 = (T \cap C^\circ(w))^\circ$. Ce groupe est w-invariant.

Si $T_0 \neq 1$, alors d'après le Corollaire 2.2.9, $T = N^\circ(T_0)$. Dans ce cas, $N^\circ_{C^\circ(w)}(T_0) = T_0$, et T_0 est un sous-groupe de Carter de $C^\circ(w)$. Alors T_0 est autonormalisant dans $C^\circ(w)$ selon le Fait 1.5.2. Ainsi $Z(C^\circ(w)) \leq N_{C^\circ(w)}(T_0) = T_0$. Mais comme w est torique par hypothèse, on a $w \in C^\circ(w)$. En particulier, $w \in Z(C^\circ(w))$, et il vient donc $w \in T_0 \leq T$. Un sous-groupe de Borel contenant T est alors w-invariant, c'est une contradiction. Ainsi $T_0 = 1$.

$C_T(w)$ est donc fini. D'après le Fait 1.3.3, w inverse T. $\square$

Corollaire 2.2.14 *On suppose $w \in C^\circ(w)$. Soit T un contre-exemple* maximal *à la $\langle w\rangle$-échelle. Si $1 \neq T_0 \leq T$ est un sous-groupe définissable, alors $T = N^\circ(T_0)$.*

Lemme 2.2.15 *Un contre-exemple* maximal *à la $\langle w\rangle$-échelle contient la composante connexe d'un 2-sous-groupe de Sylow de G.*

Preuve

Soit T un contre-exemple maximal à la $\langle w\rangle$-échelle. Pour $g \notin N(T)$, on forme $T_g = T \cap T^g$. Si $T_g \neq 1$, alors le Corollaire 2.2.14 implique $N^\circ(T_g) = T$, et $N^\circ(T_g) = T^g$ de même, une contradiction. Ainsi les conjugués de T sont deux-à-deux disjoints. Comme $N^\circ(T) = T$, il vient que T^G est générique dans G par un simple calcul de rang.

Fixons maintenant un sous-groupe de Borel B_w contenant $C^\circ(w)$. Le Fait 1.2.6 donne la généricité de B_w^G. Il existe donc $g \in G$ tel que $T \cap B_w^g \neq 1$. Nous montrons que cette intersection est infinie. Soit $x \in (T \cap B_w^g)^\#$. D'une part $T \leq C^\circ(x)$, d'autre part $C^\circ(x)$ est un sous-groupe propre définissable, connexe et w-invariant de G. Par maximalité de T, il vient $T = C^\circ(x)$. Maintenant comme B_w^g est résoluble, $C^\circ_{B_w^g}(x)$ est infini, et ce dernier sous-groupe est égal à $(T \cap B_w^g)^\circ$. On en déduit que $K = (T \cap B_w^g)^\circ$ est non-trivial.

D'après le Corollaire 2.2.14, il vient $T = N^\circ(K)$. En particulier $N^\circ_{B_w^g}(K) = K$, et K est donc un sous-groupe de Carter de B_w^g. D'après le Corollaire 1.5.3, K contient un 2-sous-groupe de Sylow de B_w^g. Donc T aussi contient un 2-sous-groupe de Sylow de B_w^g. Maintenant l'hypothèse sur w implique que B_w a même rang de Prüfer que G, et T contient donc bien un 2-tore maximal de G, c'est-à-dire la composante connexe d'un 2-sous-groupe de Sylow de G. $\square$

Enfin, en prévision du lien avec $\mathrm{PSL}_2(K)$, nous précisons un dernier point.

Lemme 2.2.16 *Soit G un groupe simple connexe minimal de type impair. On suppose qu'une involution torique w de G possède un contre-exemple à la $\langle w\rangle$-échelle. Alors G est de rang de Prüfer 1, et le centralisateur de w n'est pas un sous-groupe de Borel de G.*

Preuve

On part d'un contre-exemple maximal à la $\langle w\rangle$-échelle, disons T. D'après le Lemme 2.2.15, T contient la composante connexe S_1° d'un 2-sous-groupe de Sylow S_1 de G.

Soit B un sous-groupe de Borel contenant T. Soit A un sous-groupe B-minimal de B. Si A est central dans B, alors $A \leq C^\circ(T) = T$, et dans ce cas d'après le Corollaire 2.2.14 il vient $T = N^\circ(A) = B$, une contradiction.

Ainsi A n'est pas central dans B, et $B/C_B(A)$ est infini. Il est connu que $A \leq Z(F^\circ(B))$, et que le groupe $A \rtimes B/C_B(A)$ satisfait les hypothèses du théorème du corps de Zilber (Fait 1.6.1). Soit K le corps impliqué.

Nous prouvons $C_T(A) = 1$. Sinon, soit $t \in C_T(A)^\#$. Notant $d(t)$ la clôture définissable de t, il vient d'après le Corollaire 2.2.14 que $A \leq N^\circ(d(t)) = T$, et $B = N^\circ(A) = T$, une contradiction.

Ainsi $C_T(A) = 1$, et $T \hookrightarrow B/C_B(A)$, lequel se plonge dans $K^\times$. Ceci prouve que le rang de Prüfer de G est au plus 1, et comme il n'est pas nul par hypothèse, c'est exactement 1.

Soit j l'unique involution, torique, de S_1°. La conjugaison des involutions toriques dans un groupe de rang de Prüfer 1 est conséquence immédiate du Fait 1.3.7. Ainsi w et j sont conjuguées dans G. Maintenant comme $T = C^\circ(j)$ d'après le Corollaire 2.2.14, et que T n'est pas un sous-groupe de Borel, $C^\circ(w)$ n'est pas non plus un sous-groupe de Borel. $\square$

Chapitre 3

Un résultat d'identification de PSL_2

Nous prouvons ici le

Théorème 3.0.1 *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal de type impair et de rang de Prüfer 1, et i une involution torique de G. On suppose que $C^\circ(i)$ n'est pas un sous-groupe de Borel de G. Alors G est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(K)$, où K est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2.*

La preuve du Théorème 3.0.1 repose sur des calculs de rang avec les éléments fortement réels que permet l'hypothèse que $C^\circ(i)$ n'est pas un sous-groupe de Borel. Ces calculs ont été utilisés pour la première fois dans le contexte de rang de Morley fini par Nesin pour les groupes de type pair dans [DN94], et pour les groupes de type impair par Jaligot dans le travail non publié [Jal00]. C'est également sur de tels calculs que s'appuie la preuve de [CJ04, Theorem 1.8, 1, a], formulé dans le cadre ordinaire. Il va de soi que les techniques liées à l'ordinarité, sont à traduire, sinon à réinventer.

Nous allons privilégier les sous-groupes de Borel qui contiennent $C^\circ(i)$ pour une involution torique i, et y penserons comme aux sous-groupes de Borel *standards.* On sait conjuguer les involutions toriques en rang de Prüfer 1, mais en l'absence de résultat général de conjugaison des sous-groupes de Borel, rien ne dit que *tous* les sous-groupes de Borel soient standards. En revanche, dans notre groupe-cible PSL_2, les sous-groupes de Borel sont conjugués et contiennent bien le centralisateur connexe de leurs involutions. Notre définition de sous-groupe de Borel standard diffère de celle de [BCJ07], qui était la suivante : un sous-groupe de Borel qui contient la composante connexe d'un 2-sous-groupe de Sylow. En 2-rang de Prüfer 1, cela équivaut à posséder une involution, mais c'est a priori plus faible que contenir le centralisateur connexe de cette involution. Du reste le Fait 1.2.6, plus récent, suggérerait d'adopter comme définition générale : un sous-groupe de Borel qui contient le centralisateur connexe de la composante connexe d'un 2-sous-groupe de Sylow (ou de n'importe quel p-tore maximal).

Dernière remarque : la toricité (Fait 1.4.5) n'était pas disponible au moment d'entreprendre ce travail. On y séparait donc avec soin les involutions toriques des éventuelles involutions parasites. A la ligne de démonstration, la toricité n'apporte guère : elle pourrait raccourcir de nombreux arguments, mais ne changerait rien au cœur et aux muscles de la preuve. Dans tout ce chapitre on en fera donc l'économie. Il faut cependant garder à l'esprit que le Théorème 3.0.1 et son Corollaire 3.0.2 ci-après valent tous deux sans faire l'hypothèse de toricité.

Après une étude des involutions et l'introduction des ensembles $T[w]$ en §3.1, la preuve du Théorème 3.0.1 se divisera en deux cas. La première configuration (§3.2) aboutit à PSL_2, et la seconde (§3.3) s'avérera inconsistante.

Le Théorème 3.0.1 a mis en lumière une autre caractérisation intéressante de PSL_2.

Corollaire 3.0.2 *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal de type impair, et w une involution torique de G. Alors :*

- *soit tout sous-groupe propre définissable, connexe, et w-invariant de G est inclus dans un sous-groupe de Borel w-invariant,*

- *soit G est isomorphe à $PSL_2(K)$, où K un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2.*

Pour prouver ce corollaire du Théorème 3.0.1, nous ferons appel au Lemme 2.2.16.

Preuve du Corollaire 3.0.2

On suppose qu'il existe un sous-groupe propre définissable, connexe, et w-invariant T de G qui n'est inclus dans aucun sous-groupe de Borel w-invariant. En particulier $T \neq 1$, car sinon n'importe quel sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(w)$ conviendrait.

Le Lemme 2.2.16 implique alors que G est de rang de Prüfer 1, et que $C^\circ(w)$ n'est pas un sous-groupe de Borel de G. D'après le Théorème 3.0.1, G est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(K)$, où K est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2. $\square$

Enfin, le Corollaire 3.0.2 connaîtra un dernier avatar dans l'énoncé 4.3.4 de l'entracte. Mais pour le moment, concentrons nos efforts sur la preuve du Théorème 3.0.1. Rappelons encore que la scrupuleuse distinction entre involutions de i^G et involutions de $I(G) \setminus i^G$ n'a pas lieu d'être au vu du Fait 1.4.5, car $I(G) = i^G$.

3.1 Analyse préliminaire

Fixons des notations.

Notation 3.1.1

G est un groupe simple connexe minimal de type impair et de 2-rang de Prüfer 1.

S est un 2-sous-groupe de Sylow de G et i est l'unique involution de S°.

On suppose que $C^\circ(i)$ n'est pas un sous-groupe de Borel de G.

B est un sous-groupe de Borel de G contenant strictement $C^\circ(i)$.

3.1.1 Involutions de B

Lemme 3.1.2 *$F^\circ(B)$ est sans involution.*

Preuve

Soit sinon j une involution de $F^\circ(B)$. D'après le Fait 1.4.4, j est dans un 2-tore T de $F^\circ(B)$ que l'on peut supposer être son 2-tore maximal. En particulier $C_B^\circ(j) \geq C_B^\circ(T) \geq B$ d'après le Fait 1.4.2. Ainsi $i = j \in Z(B)$, contre l'hypothèse que $C^\circ(i)$ n'est pas un sous-groupe de Borel. $\square$

Lemme 3.1.3 *$C_B(i)$ est connexe, B peut s'écrire sous la forme $B = C_G^\circ(i) \cdot (F^\circ(B))^{-i}$, et cette décomposition est univoque.*

Preuve

Nous passons modulo $F^\circ(B)$. D'après le Fait 1.7.4, le quotient $B/F^\circ(B)$ est abélien, donc l'action de i y est triviale.

En particulier pour tout $b \in B$, il existe un $f \in F^\circ(B)$ tel que $b^i = bf$. Conjuguant à nouveau par i, on trouve $f^i = f^{-1}$, i.e. $f \in (F^\circ(B))^{-i}$. D'après le Lemme 3.1.2 et le Fait 1.3.2, on peut écrire $f = g^2$, où g est encore dans $(F^\circ(B))^{-i}$. Il vient $b = (bg)g^{-1}$, où $(bg)^i = (bf)g^{-1} = bg \in C_B(i)$ et $g^{-1} \in (F^\circ(B))^{-i}$.

Ainsi $B = C_B(i) \cdot (F^\circ(B))^{-i}$. Par connexité, $B = C_B^\circ(i) \cdot (F^\circ(B))^{-i} = C_G^\circ(i) \cdot (F^\circ(B))^{-i}$. Montrons enfin l'unicité de la décomposition : si l'on a $c_1 f_1 = c_2 f_2$ avec des notations naturelles, il vient $f_2 f_1^{-1} \in C(i)$, donc $f_1^2 = f_2^2$, ce qui dans $F^\circ(B)$ qui est sans 2-torsion implique $f_1 = f_2$. Le lemme est prouvé. $\square$

Corollaire 3.1.4 $I(B) = i^{F^\circ(B)}$.

Preuve

En effet les involutions de B sont conjuguées dans B d'après les Faits 1.4.4 et 1.3.7 en rang de Prüfer 1, et le Lemme 3.1.3 implique alors $I(B) = i^{F^\circ(B)}$. $\square$

3.1.2 Involutions toriques et unipotence

L'involution i n'étant pas centrale dans B, B n'est pas abélien. En particulier, on sait d'après le Fait 1.8.14 que B admet un paramètre d'unipotence *maximal* distinct de $(\infty, 0)$, que nous fixons *pour tout le reste de cet article.*

Notation 3.1.5 *Soit $\tilde{p} = (p, d)$ un paramètre d'unipotence* maximal *de B. (On vient de remarquer $d > 0$.)*

Remarque 3.1.6 *La caractéristique p est première ou ∞, mais l'hypothèse sur le type de G implique que ce n'est pas 2. Rappelons également que plusieurs paramètres maximaux pourraient a priori être disponibles, nous en fixons un pour tout l'article. Remarquons aussi qu'on maximise $\tilde{p}$ seulement à B fixé, et non pas en le faisant varier parmi tous les sous-groupes de Borel de G contenant $C^\circ(i)$. Enfin, p sera bien la caractéristique du corps intervenant dans la conclusion du Théorème 3.0.1.*

Lemme 3.1.7 *$d_p(C^\circ(i)) \leq d$.*

Preuve
$C^\circ(i) \leq B$. □

Le lemme et le corollaire qui suivent (Lemme 3.1.8 et Corollaire 3.1.9) concernent le seul cas où $p = \infty$. Si la caractéristique est première, l'hypothèse du Lemme 3.1.8 n'est jamais vérifiée, et la conclusion du Corollaire 3.1.9 l'est toujours.

Lemme 3.1.8 *On suppose $p = \infty$. Soit j une involution conjuguée à i qui normalise un sous-groupe $H < G$ définissable, connexe, et admettant le paramètre d'unipotence* maximal *(∞, ℓ), avec $\ell > d$. Alors j inverse $U_\infty(H)$.*

Preuve
Comme on l'a remarqué, nécessairement $p = \infty$ puisque $\ell > d$. L'unipotence considérée ici est celle de caractéristique nulle.

$U_\infty(H) = U_{(\infty,\ell)}(H)$ est sans involution. Sinon, comme il est connexe, il contient tout un 2-tore T conjugué dans G à S°, car G est de rang de Prüfer 1. Le 2-tore T est central dans $U_\infty(H)$, car ce dernier est nilpotent. En particulier, $U_\infty(H)$ centralise son involution, qui est une G-conjuguée de i, contre le Lemme 3.1.7.

Le Fait 1.8.21 implique alors que $C^\circ_{U_\infty(H)}(j)$ est un (∞, ℓ)-sous-groupe. S'il est non-trivial, c'est encore une contradiction au Lemme 3.1.7. Ainsi $C^\circ_{U_\infty(H)}(j) = 1$, et donc j inverse $U_\infty(H)$. □

Corollaire 3.1.9 *On suppose $p = \infty$. Soient j et k deux conjuguées distinctes de i normalisant un sous-groupe $1 \neq H < G$ définissable et connexe. Si $[j, k] = 1$, alors $d_\infty(H) \leq d$.*

Preuve
Comme on l'a remarqué avant d'énoncer le Lemme 3.1.8, la conclusion est triviale si $p \neq \infty$, puisqu'alors $d = \infty$.

L'élément jk est une troisième involution normalisant H, et encore conjuguée à i d'après le Corollaire 1.3.10. Si $d_\infty(H) > d$, alors d'après le Lemme 3.1.8, chacune de ces trois involutions inverse $U_\infty(H)$, ce qui force $U_\infty(H) = 1$. Pourtant on a supposé $d_\infty(H) > d > 0$, d'où $U_\infty(H) \neq 1$, une contradiction. □

3.1.3 Involutions toriques de $N(B)$

Théorème 3.1.10 *Avec la Notation 3.1.1, $i^G \cap N(B) \subseteq B$.*

Cette sous-section est consacrée à la preuve du Théorème 3.1.10. Supposons le contraire et

fixons une involution k de $i^G \cap (N(B) \setminus B)$.

A conjugaison près on peut supposer que k normalise S° d'après le Lemme 2.1.1. Notamment, k inverse S° d'après le Corollaire 1.3.10.

Lemme 3.1.11 $C^\circ_{F^\circ(B)}(k) \neq 1$.

Preuve

Sinon, k inverse $F^\circ(B)$ d'après le Fait 1.3.2. Comme k inverse S°, il vient $[S^\circ, F^\circ(B)] = 1$ avec le Lemme 1.3.1. Alors $F^\circ(B) \cdot S^\circ$ est un sous-groupe nilpotent et normal de B d'après le Fait 1.7.4, et donc inclus dans $F^\circ(B)$. En particulier $i \in S^\circ \leq F^\circ(B)$, une contradiction au Lemme 3.1.2. □

Notation 3.1.12 *Soit B_k un conjugué de B contenant $C^\circ(k)$. (On a $B_k \neq B$, car $k \notin B$).*

Remarque 3.1.13 *Par conjugaison, le paramètre d'unipotence $\tilde{p} = (p, d)$ est* maximal *pour B_k.*

Lemme 3.1.14 *Soit X un sous-groupe définissable connexe de B (resp. B_k) invariant par i et k, et admettant $\tilde{p}$ comme paramètre d'unipotence. Alors B (resp. B_k) est le seul sous-groupe de Borel de paramètre d'unipotence* maximal *$\tilde{p}$ contenant X.*

Preuve

Nous faisons la preuve pour B, celle pour B_k étant similaire. On peut librement supposer que $X = U_{\tilde{p}}(X) \neq 1$, et donc que X est un $U_{\tilde{p}}$-groupe. Soit B_1 un sous-groupe de Borel de paramètre d'unipotence maximal $\tilde{p}$ et contenant X.

Comme X est de degré d'unipotence maximal dans B_1, on a $X \leq U_{\tilde{p}}(B_1)$, et il vient donc $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B_1))) \leq C^\circ(X)$. Mais ce dernier sous-groupe est $\langle i, k\rangle$-invariant, et le Corollaire 3.1.9 s'applique. Ainsi le degré d'unipotence de $C^\circ(X)$ est $\leq d$, et donc $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B_1))) \leq U_{\tilde{p}}(C^\circ(X))$. De même $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \leq U_{\tilde{p}}(C^\circ(X))$.

Si $p \neq \infty$, le Lemme 1.8.5 avec $A = U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ implique que B est l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(X)$. Le même argument vaut pour B_1, et donc $B_1 = B$.

Si $p = \infty$, le Lemme 1.9.1 avec $U = A = U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ implique que $U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant A, et donc que c'est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{p}}(C^\circ(X))$. Le même argument vaut pour B_1, et donc $B_1 = B$. □

Corollaire 3.1.15 *L'involution k inverse $U_{\tilde{p}}(B)$.*

Preuve

$U_{\tilde{p}}(B) \leq F^\circ(B)$ d'après le Fait 1.8.1 ou 1.8.23 selon que la caractéristique est p ou ∞. Comme $F^\circ(B)$ est $2^\perp$ d'après le Lemme 3.1.2, $U_{\tilde{p}}(B)$ est sans involution.

Supposons que k n'inverse pas $U_{\tilde{p}}(B)$. Alors $X = C^\circ_{U_{\tilde{p}}(B)}(k) \neq 1$ d'après le Fait 1.3.2. Or X est un $U_{\tilde{p}}$-groupe, ce qui est évident si $p \neq \infty$, et provient du Fait 1.8.21 sinon. Par construction, $X \leq B \cap B_k$.

Le Lemme 3.1.14, avec X dans B *et* dans B_k, donne $B = B_k$, contre la Notation 3.1.12. □

Corollaire 3.1.16 *$U_{\tilde{p}}(B)$ est abélien, inversé par k et ik, et centralisé par i.*

Preuve

En effet, tout ce que nous venons de voir pour k vaut encore pour ik d'après le Corollaire 1.3.10, et donc ik inverse $U_{\tilde{p}}(B)$ d'après le Corollaire 3.1.15. En particulier $i = ikk$ centralise $U_{\tilde{p}}(B)$. □

Corollaire 3.1.17 *B est l'unique sous-groupe de Borel de paramètre* maximal *$\tilde{p}$ contenant $C^\circ(i)$. En particulier la configuration est symétrique dans le sens suivant. L'involution i normalise B_k mais n'est pas dans B_k, les involutions i et ki inversent $U_{\tilde{p}}(B_k)$, et k le centralise.*

Preuve

Le Lemme 1.9.1 impose l'unicité de B parmi les sous-groupes de Borel de paramètre maximal $\tilde{p}$ contenant $U_{\tilde{p}}(B)$, et nous venons de prouver que $U_{\tilde{p}}(B) \leq C^\circ(i)$. Ceci démontre le premier point.

B_k est alors l'unique conjugué de B contenant $C^\circ(k)$. Comme i normalise $C^\circ(k)$, i normalise également B_k, et c'est aussi vrai de ik. Si $i \in B_k$, alors elle y est conjuguée à k d'après la conjugaison et la connexité des 2-sous-groupes de Sylow de B_k dont le rang de Prüfer est 1. Il vient alors $C^\circ(i) \leq B_k$, et donc $B_k = B$, une contradiction. Donc $i \notin B_k$. Le Corollaire 3.1.16 s'applique alors, mutatis mutandis, à l'action de $\langle i, k\rangle$ sur B_k, ce qui achève la démonstration. □

Notation 3.1.18 *Soit* $H = (B \cap B_k)^\circ$.

Remarque 3.1.19 H *est* k*-invariant. Par symétrie, il est également* i*-invariant. D'autre part* $H \neq 1$ *d'après le Lemme 3.1.11.*

Lemme 3.1.20 H *est sans involution, abélien et centralisé par* k.

Preuve

Nous montrons que H est sans involution. Sinon d'après le Fait 1.4.4, H qui est connexe contient un 2-tore T, que l'on peut supposer k-invariant grâce au Lemme 2.1.1. Le groupe $T \rtimes \langle k \rangle$ est alors un 2-sous-groupe de B_k, donc d'après le Fait 1.4.4, et l'hypothèse que le rang de Prüfer du groupe ambiant est 1, il vient $k \in T \leq B$, une contradiction.

Nous montrons que H est abélien. Sinon, $H' \neq 1$. Soit $K = C^\circ(H')$. Alors K est $\langle i, k \rangle$-invariant. D'après le Corollaire 3.1.9 si $p = \infty$ ou de façon évidente sinon, $d_p(K) \leq d$. Mais d'autre part, K contient tant $U_{\tilde{p}}(Z^\circ(F(B))) = U_{\tilde{p}}(B)$ que $U_{\tilde{p}}(B_k)$. Avec le Fait 1.8.1 ou le Fait 1.8.23 suivant la valeur de p, il vient que $U_{\tilde{p}}(B)$ et $U_{\tilde{p}}(B_k)$ sont inclus dans $F^\circ(K)$. Si $p \neq \infty$, le Lemme 1.8.5 implique $B = B_k$, une contradiction à la Notation 3.1.12. Si $p = \infty$, d'après le Lemme 1.9.1, $U_{\tilde{p}}(B)$ est un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G. Il vient alors $U_{\tilde{p}}(B_k) \leq U_{\tilde{p}}(B)$, d'où l'égalité par conjugaison des $\tilde{p}$-sous-groupes de Sylow de K. Puis passant aux normalisateurs, $B = B_k$, encore une contradiction à la Notation 3.1.12.

Nous montrons que k centralise H. Sinon H^{-k}, un groupe abélien connexe d'après l'abélianité de H et le Fait 1.3.2, est non-trivial. Soit $K = C^\circ(H^{-k})$. D'une part k inverse $U_{\tilde{p}}(B)$. Le groupe H^{-k} le normalise, donc d'après le Lemme 1.3.1, on a $U_{\tilde{p}}(B) \leq K$. D'autre part k centralise $U_{\tilde{p}}(B_k)$. Le groupe H^{-k} le normalise, donc toujours d'après le Lemme 1.3.1, on a $U_{\tilde{p}}(B_k) \leq K$. Or H^{-k}, et donc K, est $\langle i, k \rangle$-invariant. En particulier, avec le Corollaire 3.1.9, $d_p(K) \leq d$, et K admet $\tilde{p}$ comme paramètre d'unipotence *maximal.* Il contient pourtant $U_{\tilde{p}}(B)$ et $U_{\tilde{p}}(B_k)$, et l'on obtient une contradiction comme au point précédent. □

Lemme 3.1.21 $C_B^\circ(H) = H$.

Preuve

Une inclusion est simplement l'abélianité de H. Nous prouvons à présent que $C_B^\circ(H) \leq H$. Soit $Y = C^\circ_{F^\circ(B_k)}(i) \leq H$. Alors $Y \neq 1$ d'après le Lemme 3.1.11 et la symétrie de la configuration, décrite par le Corollaire 3.1.17. En outre i et k normalisent Y. Donc $K = C^\circ(Y)$ est également $\langle i, k \rangle$-invariant. D'après le Corollaire 3.1.9, $d_p(K) \leq d$.

$U_{\tilde{p}}(B_k)$ est abélien, donc d'après le Fait 1.8.18, il centralise Y. Ainsi $U_{\tilde{p}}(B_k) \leq K$, et donc $d_p(K) = d$. Si $p \neq \infty$, alors le Lemme 1.8.5 donne $K \leq B_k$. Si $p = \infty$, d'après le Lemme 1.9.1, $U_{\tilde{p}}(B_k)$ est un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G, et donc $U_{\tilde{p}}(K) \geq U_{\tilde{p}}(B_k)$ est une égalité. On a encore $K \leq N^\circ(U_{\tilde{p}}(B_k)) = B_k$.

Enfin $C_B^\circ(H) \leq C_B^\circ(Y) \leq (B \cap B_k)^\circ = H$, ce qui prouve la seconde inclusion. □

Notation 3.1.22 *Soit* $N = N_B^\circ(H)$.

Lemme 3.1.23 N *est sans involution.*

Preuve

Sinon il contient un 2-tore T que l'on peut supposer k-invariant d'après le Lemme 2.1.1. En particulier, k inverse T d'après le Corollaire 1.3.10. Comme k centralise H, le Lemme 1.3.1 implique $[T, H] = 1$, et donc $T \leq C_B^\circ(H) = H$, qui est pourtant sans involution d'après le Lemme 3.1.20. □

Lemme 3.1.24 $N = H$.

Preuve

Ecrivons en effet $N = C_N(k) \cdot N^{-k}$ avec le Fait 1.3.2. La décomposition étant univoque, chacun de ces ensembles est de degré 1. En particulier $C_N(k) = C_N^\circ(k) \leq H$.

N^{-k} est un ensemble 2-divisible de degré 1 qui normalise H. En particulier, pour chaque $n \in N^{-k}$, la clôture définissable $d(n)$ est un groupe 2-divisible encore inversé par k. Le Lemme

1.3.1 implique alors $[d(n), H] = 1$, et cela est vrai pour tout $n \in N^{-k}$. Ainsi $[N^{-k}, H] = 1$, et donc $N^{-k} \subseteq C(H)$.

En conclusion, $N \leq C(H)$ et $N \leq C_B^\circ(H) = H$ d'après le Lemme 3.1.21. $\square$

Nous dérivons maintenant la contradiction finale de cette sous-section. H est abélien et d'indice fini dans $N_B^\circ(H)$, donc c'est un sous-groupe de Carter de B. D'après le Corollaire 1.5.3, H contient un 2-tore, une contradiction avec le Lemme 3.1.20 qui achève la preuve du Théorème 3.1.10. $\square$

3.1.4 Produits d'involutions toriques et ensembles $T[w]$

Commençons par remarquer que $i^G \setminus N(B)$ (cet ensemble coïncide avec $i^G \setminus B$ d'après le Théorème 3.1.10) est générique dans i^G d'après le Fait 1.2.1. Nous nous concentrerons donc sur les conjuguées de i qui ne normalisent pas B et étudierons la façon dont elles se répartissent dans les cosets de B.

Notation 3.1.25 *Soit pour $w \in i^G \setminus N(B)$ l'ensemble définissable*

$$T[w] = \{b \in B,\, b^w = b^{-1}\}.$$

Remarque 3.1.26 *On a les équivalences : $T[w]$ est un groupe $\Leftrightarrow$ $T[w] = d(T[w])$ est un groupe définissable $\Leftrightarrow$ les éléments de $T[w]$ commutent deux-à-deux.*

On remarque avec le Lemme 3.1.3 et l'égalité $C^\circ(i) = C_B^\circ(i)$ que

$$\mathrm{rg}(B) - \mathrm{rg}(C^\circ(i)) = \mathrm{rg}\left((F^\circ(B))^{-i}\right).$$

Notation 3.1.27 *Soit l'ensemble définissable*

$$I_0 = \{w \in i^G \setminus N(B),\; \mathrm{rg}(T[w]) \geq \mathrm{rg}\left((F^\circ(B))^{-i}\right)\}.$$

Lemme 3.1.28 *I_0 est générique dans i^G.*

Preuve

Considérons $i^G \setminus N(B)$ muni de la relation d'équivalence définissable $\sim$ définie par

$$w_1 \sim w_2 \Leftrightarrow w_1 w_2 \in B,$$

et la projection canonique

$$p : i^G \setminus N(B) \to (i^G \setminus N(B))/\sim.$$

Pour k variant de 0 à $\mathrm{rg}(G)$, les ensembles

$$X_k = \{w \in i^G \setminus N(B),\; \mathrm{rg}\left(p^{-1}(p(w))\right) = k\}$$

sont définissables par définissabilité du rang. De plus ils sont deux-à-deux disjoints, et recouvrent $i^G \setminus N(B)$. Or l'ensemble $i^G \setminus N(B)$ est de degré 1. Il existe donc un unique entier k_0 tel que X_{k_0} soit générique dans $i^G \setminus N(B)$. Ce k_0 doit vérifier

$$\mathrm{rg}\left(i^G \setminus N(B)\right) = \mathrm{rg}\left(X_{k_0}\right) = k_0 + \mathrm{rg}\left(p(X_{k_0})\right).$$

Comme $p(X_{k_0})$ s'injecte dans G/B, on a $\mathrm{rg}(p(X_{k_0})) \leq \mathrm{rg}(G/B)$, et donc

$$k_0 \geq \mathrm{rg}\left(i^G \setminus N(B)\right) - \mathrm{rg}\left(G/B\right) = \mathrm{rg}\left(i^G\right) - \mathrm{rg}\left(G/B\right) = \mathrm{rg}\left(B\right) - \mathrm{rg}\left(C^\circ(i)\right),$$

c'est-à-dire $k_0 \geq \mathrm{rg}\left((F^\circ(B))^{-i}\right)$.

Or pour tout $w_1 \in i^G \setminus N(B)$, la fibre au-dessus de $p(w_1)$ est

$$p^{-1}\left(p(w_1)\right) = \{w_2 \in i^G \setminus N(B), w_1 w_2 \in B\} \subseteq w_1 T[w_1].$$

Ainsi, pour $w_1 \in X_{k_0}$, $\mathrm{rg}(T[w_1]) \geq k_0 \geq \mathrm{rg}\left((F^\circ(B))^{-i}\right)$, et donc $w_1 \in I_0$. D'où $X_{k_0} \subseteq I_0$. L'ensemble I_0 est donc bien générique dans $i^G \setminus N(B)$, et dans i^G. $\square$

La preuve du Théorème 3.0.1 va maintenant se diviser en deux cas, selon que i inverse un sous-groupe "intéressant" ou non (la formalisation est contenue dans les deux Théorèmes jumeaux 3.2.1 et 3.3.1). Le premier cas mène à PSL_2, et le second à une contradiction. En §3.2 ci-dessous, on aboutit à PSL_2 par les calculs de rang faisant intervenir $T[w]$. En §3.3 ci-après, c'est moins facile. Il faudra une assez patiente étude des sous-groupes en présence pour montrer l'inconsistance de la configuration restante.

3.2 Cas I : $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \not\leq C^\circ(i)$

Dans cette partie nous démontrerons le Théorème 3.0.1 avec l'hypothèse supplémentaire que "i inverse de l'unipotence" dans B. Dans PSL_2, une involution inverse le sous-groupe unipotent d'un sous-groupe de Borel contenant la composante connexe de son centralisateur ce qui est notre notion de Borel "standard". L'hypothèse que nous introduisons est une approximation très faible et néanmoins suffisante de ce fait, et sera établie seulement par la suite (§3.3 ci-dessous). Ainsi nous montrons dans cette section le

Théorème 3.2.1 *Soient G un groupe simple connexe minimal de type impair et de rang de Prüfer 1, et i une involution de G. On suppose qu'il existe un sous-groupe de Borel B de G contenant $C^\circ(i)$ tel que $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \not\leq C^\circ(i)$, où $\tilde{p} = (p, d)$ est un paramètre d'unipotence* maximal *de B. Alors G est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(K)$, où K est un corps algébriquement clos de caractéristique p.*

Nous travaillons donc dans tout cette section sous l'hypothèse

$$(\mathrm{I}) : U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \not\leq C^\circ(i).$$

Remarquons que l'inclusion $C^\circ(i) < B$ est nécessairement stricte sous cette hypothèse. Les notations et résultats préliminaires de §3.1 valent donc encore dans cette section, c'est-à-dire que B est un sous-groupe de Borel de G contenant strictement $C^\circ(i)$ selon la Notation 3.1.1, et que $\tilde{p} = (p, d)$ en est un paramètre d'unipotence *maximal* comme dans la Notation 3.1.5. Parmi les résultats préliminaires de §4, rappelons que d'après le Théorème 3.1.10,

$$i^G \cap N(B) \subseteq B.$$

Le résultat d'identification que nous utiliserons fait appel à la notion de groupe de Zassenhaus. Nous renvoyons à [BN94, §11.5] pour ce qui suit. Un *groupe de Zassenhaus* est un groupe 2-transitif tel que le stabilisateur de trois points distincts soit toujours trivial. Un groupe de Zassenhaus est *scindé* si le stabilisateur de deux points possède un complément normal dans le stabilisateur d'un point (i.e., s'il est complément semi-direct d'un sous-groupe normal dans le stabilisateur d'un point).

Voici le général résultat employé.

Fait 3.2.2 ([BN94, Theorem 11.89]) *Soit G un groupe de Zassenhaus scindé infini de rang de Morley fini. Si le stabilisateur de deux points contient une involution, alors G est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(K)$, où K est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de* 2.

3.2.1 Un sous-groupe B-minimal

Comme dans §4, I_0 désigne l'ensemble des involutions w de $i^G \setminus N(B)$ qui satisfont

$$\mathrm{rg}(T[w]) \geq \mathrm{rg}(B) - \mathrm{rg}(C_B^\circ(i)) = \mathrm{rg}\left((F^\circ(B)^{-i}\right).$$

Rappelons que cet ensemble est générique dans i^G d'après le Lemme 3.1.28.

Notation 3.2.3 *Soit $U = (U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))))^{-i}$.*

Lemme 3.2.4 *U est un $U_{\tilde{p}}$-sous-groupe $\tilde{p}$-homogène de $U_{\tilde{p}}(B)$, non-trivial, et normal dans B.*

Preuve

U est bien un groupe car $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ est abélien. La non-trivialité de U est l'hypothèse (I) de la présente section. Le fait que U soit normal dans B est évident, puisque $B = (F^\circ(B))^{-i} \cdot C^\circ(i)$ d'après le Lemme 3.1.3.

D'après le Fait 1.3.2 et le Lemme 3.1.2, $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ est produit direct de $C_{U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))}(i)$ et de U. Ce dernier est donc définissablement isomorphe à un quotient de $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$, et donc d'après le "push-forward" du Fait 1.8.17, U est un $\tilde{p}$-groupe. Selon le Fait 1.8.26, le groupe $[U, B]$ est $\tilde{p}$-homogène au sens de la Définition 1.8.24. Or $U = [U, i] \leq [U, B] \leq U$, et donc $U = [U, B]$ est $\tilde{p}$-homogène. □

Notation 3.2.5 *Soit A un sous-groupe B-minimal de U.*

Lemme 3.2.6 *A est un $\tilde{p}$-groupe.*

Preuve
U est un $\tilde{p}$-groupe $\tilde{p}$-homogène. □

Remarque 3.2.7 *Le groupe U et sa $\tilde{p}$-homogénéité ne servent qu'à obtenir A. Sans l'homogénéité, on ne peut pas affirmer en général l'existence d'un $\tilde{p}$-sous-groupe B-minimal.*

Lemme 3.2.8 *$U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant A.*

Preuve
Si $p \neq \infty$, c'est le Lemme 1.8.5 appliqué avec A. Dans le cas $p = \infty$, c'est le Lemme 1.9.1, où A joue les deux rôles. □

Remarque 3.2.9 *Puisque $I(B) = i^{F^\circ(B)}$ et $A \leq Z(F^\circ(B))$, chaque involution de B inverse A.*

Lemme 3.2.10 *Soit N un sous-groupe propre définissable connexe et contenant A. Si $w \in i^G$ normalise N, alors $w \in B$.*

Preuve
Grâce au Théorème 3.1.10, il suffit de prouver que $w \in N(B)$. Supposons $w \notin N(B)$. Alors $w \notin N(A)$, car sinon w normalise $N^\circ(A) = B$, une contradiction à la définition de w. Ainsi $A^w \neq A$, et ces deux groupes sont inclus dans N. En particulier $d_p(N) \geq d$.

Nous montrons que $p = \infty$ et $d_p(N) > d$. Si $p \neq \infty$, l'inclusion de A et de A^w dans N donne immédiatement une contradiction au Lemme 1.8.5. Ainsi $p = \infty$. Supposons $d_\infty(N) \leq d$. Comme $A \leq N$, on a $d_\infty(N) = d$, et $A \leq U_{\tilde{p}}(N)$. D'après le Lemme 3.2.8, $U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant A, et donc c'est aussi l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{p}}(N)$. Mais les mêmes arguments impliquent aussi que $U_{\tilde{p}}(B^w)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{p}}(N)$. Il vient donc $U_{\tilde{p}}(B) = U_{\tilde{p}}(B^w)$, et en prenant les normalisateurs connexes, on obtient $B = B^w$, une contradiction. Ainsi $d_p(N) > d$.

Comme A est un $\tilde{p}$-sous-groupe définissable, on peut l'inclure dans un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow $\hat{U}$ de N. D'après le Corollaire 2.1.6, il existe une involution w_1, conjuguée à w sous N, qui normalise $\hat{U}$. Selon le Lemme 1.9.1 où A joue les deux rôles, $U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant A. En particulier $U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de G contenant $\hat{U}$. Comme ce dernier est w_1-invariant, $U_{\tilde{p}}(B)$ aussi est w_1-invariant. Donc $w_1 \in N(U_{\tilde{p}}(B)) \leq N(B)$, et le Théorème 3.1.10 implique que $w_1 \in B$.

D'après la Remarque 3.2.9, w_1 inverse A. Mais d'après le Lemme 3.1.8, elle inverse également $U_\infty(N)$, dont le degré d'unipotence est $> d$. Maintenant le Lemme 1.3.1 implique $[A, U_\infty(N)] = 1$, donc $U_\infty(N) \leq C^\circ(A) \leq N^\circ(A) = B$, une contradiction car B admet le paramètre d'unipotence maximal $\tilde{p}$ alors que $d_\infty(N) > d$. □

3.2.2 Le corps

Les groupes A et $B/C_B(A)$ sont définissables abéliens infinis. C'est clair pour A. Maintenant d'une part $A \leq Z(F^\circ(B))$ donc $F^\circ(B) \leq C^\circ(A)$, et ainsi $B/C_B(A)$ est abélien d'après le Fait 1.7.4, d'autre part A qui est inversé par i n'est pas central dans B, donc $B/C_B(A)$ n'est pas trivial. Comme ce dernier groupe est connexe, il est bien infini. De plus A est $B/C_B(A)$-minimal car B-minimal, et l'action de $B/C_B(A)$ sur A est définissable et sans noyau.

On applique le théorème du corps de Zilber, Fait 1.6.1, à $A \rtimes B/C_B(A)$. Alors il existe un corps algébriquement clos K tel que

$$A \simeq K_+ \qquad \text{et} \qquad B/C_B(A) \hookrightarrow K^\times,$$

où l'action de $B/C_B(A)$ sur A correspond à la multiplication du corps.

Si $p \neq \infty$, alors A est d'exposant p, et clairement K est de caractéristique p. Si $p = \infty$, alors A possède au moins une section définissable sans torsion, et donc K est, dans ce cas aussi, de caractéristique p.

Lemme 3.2.11 *Pour w dans $i^G \setminus N(B)$, $T[w] \cap C_B(A) = 1$.*

Preuve

Si $T[w] \cap C_B(A)$ contient un élément $t \neq 1$, alors le Lemme 3.2.10 appliqué au groupe $N = C^\circ(t)$ donne $w \in B$. □

Lemme 3.2.12 *Pour w dans $i^G \setminus N(B)$, $T[w]$ est un groupe définissable et abélien.*

Preuve

Si $X = F^\circ(B) \cap (F^\circ(B))^w \neq 1$, on peut appliquer le Lemme 3.2.10 au groupe $N = N^\circ(X)$, obtenant une contradiction. Donc $(B \cap B^w)' \leq F^\circ(B) \cap (F^\circ(B))^w = 1$, et $B \cap B^w$ est abélien. En particulier les éléments de $T[w]$ commutent deux-à-deux, et la Remarque 3.1.26 s'applique. □

Les involutions w varieront désormais dans I_0. Rappelons que cet ensemble est non-vide d'après le Lemme 3.1.28. Le lemme suivant donne une image très précise des sous-groupes étudiés, qui ressemblent de plus en plus à ceux de PSL_2.

Lemme 3.2.13 *Pour w dans I_0, $(F^\circ(B))^{-i} = A \simeq K_+$ et $T[w] \simeq K^\times$, les deux isomorphismes étant définissables.*

Preuve

Les Lemmes 3.2.11 et 3.2.12 prouvent que $T[w]$ s'injecte dans $B/C_B(A)$ qui lui-même se plonge dans $K^\times$, tout ceci définissablement. Comme $A \subseteq (F^\circ(B))^{-i}$ et $w \in I_0$, on a

$$\mathrm{rg}(K_+) = \mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{rg}\left((F^\circ(B))^{-i}\right) \leq \mathrm{rg}(T[w]) \leq \mathrm{rg}(K^\times),$$

et comme $\mathrm{rg}(K_+) = \mathrm{rg}(K^\times)$, ces inégalités sont toutes des égalités.

En particulier, A est générique dans $(F^\circ(B))^{-i}$. Or $B = C^\circ(i) \cdot (F^\circ(B))^{-i}$ où la décomposition est univoque d'après le Lemme 3.1.3. Le groupe $A \rtimes C^\circ(i)$ est alors générique dans B. Comme B est connexe, $B = A \rtimes C^\circ(i)$.

Nous montrons que $A = (F^\circ(B))^{-i}$. Soit $f \in (F^\circ(B))^{-i}$. Il existe $a \in A$ et $c \in C^\circ(i)$ tels que $f = ac$. Alors $f^2 = ff^{-i} = (ac)(c^{-i}a^{-i}) = acc^{-1}a = a^2 \in A$, et comme $F^\circ(B)$ est sans 2-torsion d'après le Lemme 3.1.2, $f \in A$. Ainsi $(F^\circ(B))^{-i} = A$.

Enfin, par connexité de $K^\times$, l'égalité de rangs vue plus haut implique aussi que $T[w]$ s'injecte surjectivement dans $K^\times$. □

Corollaire 3.2.14 *Pour w dans I_0, $T[w]$ contient un unique 2-tore maximal de B.*

Lemme 3.2.15 *Si $w \in i^G \setminus N(B)$ inverse S°, alors w inverse $C^\circ(i)$.*

Preuve

Nous prouvons que $C^\circ(i)$ est abélien. Sinon, nous posons $C' = (C^\circ(i))' \neq 1$ et $N = N^\circ(C')$. Alors C' est inclus dans $F^\circ(B)$ et w le normalise, donc le Lemme 3.2.10 s'applique à N, une contradiction qui prouve bien $C' = 1$.

Soit maintenant $X = C^\circ(i, w)$. Si $X \neq 1$, alors $N = N^\circ(X)$ contient S° par commutativité de $C^\circ(i)$. Mais comme $C^\circ(w)$ aussi est abélien, $C^\circ(w) \leq N$, et $w \in C^\circ(w) \leq N$. Ainsi $S^\circ \cdot \langle w \rangle$ est inclus dans un 2-sous-groupe de Sylow S_1 de N. D'après le Fait 1.4.4, S_1 est connexe, et comme le rang de Prüfer est 1, il vient $S_1 = S^\circ$ et $w \in S^\circ$, une contradiction.

Ainsi $C^\circ(i, w) = 1$, donc dans son action sur $C^\circ(i)$, l'involution w n'a qu'un nombre fini de points fixes. D'après le Fait 1.3.3, w inverse $C^\circ(i)$. □

Notation 3.2.16 *Pour w dans I_0, on note j_w l'unique involution de $T[w]$ (voir Corollaire 3.2.14).*

Corollaire 3.2.17 *Pour w dans I_0, $T[w] = C^\circ(j_w)$ est un conjugué de $C^\circ(i)$.*

Preuve
D'après le Corollaire 3.2.14, $T[w]$ contient un unique 2-tore maximal de B noté T. L'unique involution de T est notée j_w conformément à la Notation 3.2.16. Comme $T[w]$ est connexe et abélien, $T[w] \leq C^\circ(j_w)$.

Par conjugaison des 2-sous-groupes de Sylow, $S^\circ = T^b$ pour un $b \in B$, et $C^\circ(i) = C^\circ(j_w)^b$. L'involution w^b est dans $i^G \setminus N(B)$ et inverse $T^b = S^\circ$, donc d'après le Lemme 3.2.15, w^b inverse $C^\circ(i) = C^\circ(j_w)^b$. Donc w inverse $C^\circ(j_w)$, et $C^\circ(j_w) \leq T[w]$. □

Corollaire 3.2.18 *$B = A \rtimes C^\circ(i) \simeq K_+ \rtimes K^\times$.*

Preuve
On a $B = (F^\circ(B))^{-i} \cdot C^\circ(i)$ de façon bijective d'après le Lemme 3.1.3. Alors selon le Lemme 3.2.13, $B = A \cdot C^\circ(i) = A \rtimes C^\circ(i)$. A conjugaison près on peut supposer que $C^\circ(i) = T[w]$, qui agit sur A comme $K^\times$ sur K_+. □

Lemme 3.2.19 *Pour $g \notin N(B)$, on a $A^g \cap N(B) = 1$.*

Preuve
Rappelons que $A \simeq K_+$. Nous distinguons à présent deux cas, selon que la caractéristique de K est finie ou ∞.

On suppose $p = \infty$. Si $g \notin N(B)$ contredit l'affirmation, on a d'après le Fait 1.6.2 $A^g \leq N(B)$, donc $A^g \leq N^\circ(B) = B$. Comme A^g est un $\tilde{p}$-groupe d'après le Lemme 3.2.6, il vient $A^g \leq U_{\tilde{p}}(B)$. Or si l'on applique le Lemme 1.9.1 avec A^g dans les deux rôles, on trouve $U_{\tilde{p}}(B) \leq U_{\tilde{p}}(B^g)$, d'où $U_{\tilde{p}}(B) = U_{\tilde{p}}(B^g)$, ce qui force $g \in N(B)$, une contradiction.

On suppose maintenant p premier. Soit $x \in (A^g \cap N(B))^\#$, pour un $g \notin N(B)$. Alors x est d'ordre p. L'élément x normalise B, donc agit sur A qui est infini d'exposant p. Le groupe $A \cdot \langle x \rangle$ est un p-groupe infini d'exposant fini. Comme x est d'ordre p et que A est localement fini, $A \cdot \langle x \rangle$ est localement fini. D'après le Fait 1.4.3 (3), son centre est infini. En particulier $C_A^\circ(x) \neq 1$. D'autre part, le Lemme 1.8.5 implique que B^g est l'unique sous-groupe de Borel contenant A^g. Comme $A^g \leq C^\circ(x)$, il vient $C^\circ(x) \leq B^g$. Ainsi $A \cap B^g$ est infini, une contradiction au Lemme 1.8.5. □

Lemme 3.2.20 $\mathrm{rg}(G) = \mathrm{rg}(B) + \mathrm{rg}(A)$.

Preuve
Le Lemme 3.2.19 prouve une inégalité, en considérant un produit $A \cdot B^g$, pour un $g \notin N(B)$. Nous prouvons l'autre inégalité. Soit l'application définissable qui à $w \in I_0$ associe l'involution j_w comme dans la Notation 3.2.16. On rappelle que w centralise j_w. La fibre au-dessus de j_w est donc formée d'involutions w_1 qui appartiennent à $C(j_w)$. D'après le Corollaire 3.2.17, un majorant du rang de la fibre est ainsi $\mathrm{rg}(C(j_w)) = \mathrm{rg}(T[w]) = \mathrm{rg}(K^\times) = \mathrm{rg}(K_+) = \mathrm{rg}(A)$ grâce au Lemme 3.2.13. Maintenant, comme l'ensemble d'arrivée est inclus dans $I(B) = i^B$, on a $\mathrm{rg}(I_0) \leq \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(i^B)$, ce qui se réécrit $\mathrm{rg}(G) \leq \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$. □

3.2.3 Preuve du Théorème 3.2.1

Dans cette sous-section nous achevons la preuve du Théorème 3.2.1.

Soit w dans I_0, qui n'est pas vide d'après le Lemme 3.1.28. Après conjugaison dans B, on peut supposer que $j_w = i$. On prouve sans peine les points suivants.

Lemme 3.2.21 *$N(B) = B$.*

Preuve
L'application μ de $A \times N(B) \to G$ qui à (a, n) associe awn est injective. En effet si $awn = a'wn'$ avec des notations naturelles, il vient $(a'^{-1}a)^w = n'n^{-1} \in A^w \cap N(B)$, qui d'après le Lemme 3.2.19 est trivial. L'image de μ est alors générique d'après le Lemme 3.2.20, et $N(B)$ est donc de degré 1 par connexité de G. □

Lemme 3.2.22 *$G = B \sqcup AwB$.*

Preuve
Soit $g \notin B$. On construit la même application que dans la preuve du Lemme 3.2.21, en remplaçant w par g. Alors AgB est encore un sous-ensemble générique de G, donc il rencontre AwB. Ainsi $g \in AwB$. □

Lemme 3.2.23 $B \cap B^w = C^\circ(i) = T[w]$.

Preuve
L'inclusion $C^\circ(i) \leq B \cap B^w$ est claire, puisqu'on a supposé $i = j_w \in C(w)$. D'autre part, les Lemmes 3.2.19 et 3.2.21 impliquent $A \cap B^w = 1$. Alors d'après le Corollaire 3.2.18, $B \cap B^w \leq C^\circ(i)$, prouvant la première égalité. La deuxième est dans le Corollaire 3.2.17. □

Preuve du Théorème 3.2.1
On considère désormais l'action de G sur l'espace G/B des cosets à gauche de B par multiplication à gauche.

Cette action est doublement transitive. Il n'y a en effet que deux formes de cosets, à savoir B d'une part, et ceux du type awB pour $a \in A$, d'après le Lemme 3.2.22. En outre il est clair que $B = G_B$ agit transitivement sur les cosets de la forme awB.

G est un groupe de Zassenhaus (voir au-dessus de §3.2.1). Soit en effet g un élément de G stabilisant B, wB, et un troisième coset awB avec $a \in A^\#$. Alors $g \in B \cap B^w = C^\circ(i)$ d'après le Lemme 3.2.23, mais aussi $g \in B \cap B^{wa^{-1}} = (B \cap B^w)^{a^{-1}} = C^\circ(i)^{a^{-1}}$. Or $C^\circ(i) \cap (C^\circ(i))^{a^{-1}} = 1$ d'après le Corollaire 3.2.18, car nous avons pris $a \in A^\#$. Ainsi $g = 1$.

Ce groupe de Zassenhaus est scindé. En effet A est un complément normal de $T[w] = G_{B,wB}$ dans $B = G_B$.

Le stabilisateur de deux éléments contient une involution. Il suffit par double transitivité de le vérifier pour B et wB. Mais on a prouvé que $G_{B,wB} = T[w]$, lequel contient i.

Le résultat d'identification (Fait 3.2.2) permet alors de conclure que

$$G \simeq \mathrm{PSL}_2(L),$$

où L est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2.

Dans $G \simeq \mathrm{PSL}_2(L)$, les sous-groupes de Borel sont isomorphes à $L_+ \rtimes L^\times$; c'est donc le cas du sous-groupe B. On en déduit que L et K sont définissablement isomorphes en tant que corps. Or nous avons noté au début de §3.2.2 que car(K) = p. Ceci achève la preuve du Théorème 3.2.1. □

3.3 Cas II : $\neg$ Cas I

Pour montrer le Théorème 3.0.1 il reste à prouver que l'hypothèse (I) du Théorème 3.2.1 est toujours vérifiée. C'est ce que nous faisons ici avec le théorème suivant.

Théorème 3.3.1 *Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal de type impair et de rang de Prüfer 1, et i une involution torique de G. On suppose que $C^\circ(i)$ n'est pas un sous-groupe de Borel de G. Soit B un sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(i)$. Si B admet $\tilde{p}$ pour paramètre d'unipotence maximal, alors $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \not\leq C^\circ(i)$.*

Rappelons que si $C^\circ(i) < B$, alors B n'est pas abélien. En particulier ce n'est pas un bon tore, et d'après le Fait 1.8.14 il admet un paramètre $\tilde{p} = (p, d)$ avec $d > 0$, que nous supposons maximal comme dans la Notation 3.1.5.

D'autre part le Théorème 3.3.1 employé avec le Théorème 3.2.1 implique bien le résultat 3.0.1. Nous nous attachons donc désormais, et jusqu'à la fin de cet article, à prouver le Théorème 3.3.1.

On suppose en vue d'une contradiction que la conclusion du Théorème 3.3.1, ou de manière équivalente l'hypothèse (I) de la section précédente, est fausse, c'est-à-dire que l'on fait l'hypothèse

$$(\mathrm{II}) : U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \leq C^\circ(i).$$

La contradiction achevant cette longue section reposera sur un argument de "concentration" incompatible avec la simplicité du groupe ambiant.

Plus précisément, les $T[w]$ seront peu-à-peu dessinés. En §3.3.1, on explicitera leur comportement vis-à-vis des involutions. Dans §3.3.2 et §3.3.3, on établira que ce sont des groupes abéliens. Après un détour par la théorie des intersections maximales en §3.3.4, on montrera en §3.3.5 qu'il s'agit de groupes tous de même rang qu'un sous-groupe K tel que $B = K \rtimes C^\circ(i)$. La Sous-section3.3.6 est consacrée à prouver que ce sont des sous-groupes tous conjugués à K. On déduira enfin que les conjugués de K se trouvent génériquement dans B, ce qui est une contradiction à la simplicité de G.

De manière remarquable, la preuve s'interrompra dès §3.3.2 si $0 < p < \infty$ grâce au théorème de Wagner. Il n'y a pas de conclusion modèle-théorique aussi soudaine en caractéristique ∞, et l'étude se poursuit donc. Par ailleurs il faut noter que notre preuve fonctionnerait à l'identique si $0 < p < \infty$.

3.3.1 Retour sur l'involution de B

Nous suivons les notations et résultats de §4, avec désormais l'hypothèse supplémentaire (II).

Remarque 3.3.2 *Le Corollaire 3.1.4 et l'hypothèse (II) impliquent que chaque involution de B centralise $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$.*

Lemme 3.3.3 $C(i) \leq N(B)$ *(noter l'absence de "$\circ$").*

Preuve
$U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \leq U_{\tilde{p}}(C^\circ(i))$ selon l'hypothèse (II). Si $p < \infty$, alors d'après le Lemme 1.8.5, B est l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(i)$. En particulier $C(i) \leq N(B)$. D'autre part si $p = \infty$, alors d'après le Corollaire 1.9.4 appliqué avec $A = U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ et $U = U_{\tilde{p}}(C^\circ(i))$, il vient $N(U_{\tilde{p}}(C^\circ(i))) \leq N(B)$. Or il est clair que $C(i) \leq N(U_{\tilde{p}}(C^\circ(i)))$, ce qui achève dans ce cas aussi la preuve. □

On peut alors restreindre la structure du 2-sous-groupe de Sylow S, défini dans la Notation 3.1.1, comme suit.

Corollaire 3.3.4 $S \cap i^G = \{i\}$.

Preuve
Immédiat d'après le Lemme 3.3.3, le Théorème 3.1.10, et le fait que les 2-sous-groupes de Sylow de B ne possèdent qu'une involution. □

Corollaire 3.3.5

1. *$C(i)$ est connexe et inclus dans B.*
2. *$S \simeq \mathbb{Z}_{2^\infty}$ est connexe.*
3. *Toutes les involutions de G sont conjuguées.*
4. *$N(B) = B$.*

Preuve
Le point (1) vient du Corollaire 3.3.4 et du "Théorème Z^*", Fait 1.3.11. Alors $S \leq C(i) = C^\circ(i)$ qui est résoluble, et S est donc connexe grâce au Fait 1.4.4. Il est maintenant évident que les involutions de G sont toutes conjuguées d'après le Fait 1.3.7. Le dernier point découle du premier par un argument de Frattini dans $N(B)$. □

Le Corollaire 3.3.5 n'est pas nécessaire à notre preuve du Théorème 3.3.1. Nous travaillerons essentiellement avec les involutions toriques, c'est-à-dire les conjuguées de i. A chaque fois que nous montrerons qu'un sous-groupe est sans involution, ce sera un sous-groupe *connexe*, ce qui nous ramène bien aux conjuguée de i.

En conclusion, le Corollaire 3.3.5 donne une idée nette des involutions, mais en faisant intervenir un outil sans rapport avec l'idée directrice. Pour en faire l'économie, comme c'était le cas dans les premières versions de ce travail, il suffirait de choisir systématiquement les involutions de i^G dès le corollaire suivant.

Corollaire 3.3.6 *Si $x \in G^{\#}$ est centralisé par une involution j et inversé par une autre involution k, alors x est une involution.*

Preuve

L'involution k normalise $C(x)$ qui contient j. D'après le Lemme 2.1.1, k et une $C(x)$-conjuguée j' de j sont dans un même 2-sous-groupe de Sylow de G. Le Corollaire 3.3.5 impose alors $j' = k$, et donc $x = x^j = x^{j'} = x^k = x^{-1}$. □

Lemme 3.3.7 *Pour tout $g \in G \setminus N(B)$, $B \cap B^g$ est sans involution.*

Preuve

Si $j \in I(B \cap B^g)$, alors $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ et son conjugué par g sont inclus dans $U_{\tilde{p}}(C^\circ(j))$ d'après la Remarque 3.3.2. Si $p < \infty$, on a immédiatement $g \in N(B)$ grâce au Lemme 1.8.5. Si $p = \infty$, le Lemme 1.9.1 avec $A = U = U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ entraîne que $U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{p}}(C^\circ(j))$. Le même argument impose $U_{\tilde{p}}(B) = U_{\tilde{p}}(B)^g$, d'où $g \in N(B)$. □

Le Lemme 3.3.7 et l'égalité $N(B) = B$ du Corollaire 3.3.5, impliquent que B est fortement inclus dans G (voir Définition 1.1.1). Le Fait 1.1.2 prouve bien que G est de 2-rang de Prüfer 1. Mais pour nous cette conclusion est une hypothèse !

3.3.2 Etude de $T[w]$

L'ensemble I_0 de la Notation 3.1.27 est non-vide d'après le Lemme 3.1.28. Nous fixons une involution $w \in I_0$. Le Corollaire 3.3.6 a une conséquence importante sur l'ensemble $T[w]$ de la Notation 3.1.25.

Corollaire 3.3.8 $T[w] \cap (C(i))^G = 1$.

Preuve

$T[w]$ est inversé par w et inclus dans $B \cap B^w$ qui est sans involution. D'après le Corollaire 3.3.6, $T[w]$ est alors disjoint des $C(i^g)$ pour tout $g \in G$. □

Lemme 3.3.9 *Pour tout $t \in T[w]^{\#}$, la clôture définissable $d(t)$ est sans torsion.*

Preuve

Soit sinon t d'ordre premier q dans $T[w]$. D'après le Corollaire 3.3.8, $q > 2$.

B est sans q-unipotence. En effet si $U_q(B) \neq 1$, le sous-groupe $U_q(B) \cdot \langle t \rangle$ est un q-groupe nilpotent-par-fini *infini*. Selon le Fait 1.4.3, $C^\circ_{U_q(B)}(t)$ est non-trivial, or il est contenu dans $U_q(C^\circ(t))$. De même, $1 \neq C^\circ_{U_q(B^w)}(t) \leq U_q(C^\circ(t))$. Avec le Lemme 1.8.5, il vient alors $U_q(C^\circ(t)) \leq B \cap B^w$, et donc $B = B^w$, une contradiction. B est bien sans q-unipotence.

L'élément t est inclus dans un q-sous-groupe de Sylow de B, disons Q. Le Fait 1.4.3, en l'absence de q-unipotence, implique alors que Q est un q-tore, qui centralise un 2-tore de B selon le Corollaire 1.5.4. En particulier t centralise une involution torique, une contradiction au Corollaire 3.3.8. □

Lemme 3.3.10 $p = \infty$.

Preuve

Supposons $p \neq \infty$. Soit A un sous-groupe B-minimal de $U_p(Z(F^\circ(B)))$. Sous notre hypothèse, A est un p-groupe abélien élémentaire.

Nous considérons alors l'action de $B/C_B(A)$ sur A. Le quotient est infini. En effet sinon, A est central dans B, et $A \leq C^\circ(T[w])$. Ce dernier sous-groupe est w-invariant, donc A et A^w sont inclus dans un même sous-groupe définissable strict de G. Grâce au Lemme 1.8.5, on a la contradiction habituelle $B = B^w$. Ainsi le quotient $B/C_B(A)$ est-il infini.

Comme en §3.2.2, le "théorème du corps", Fait 1.6.1, s'applique. La vérification des hypothèses est immédiate comme en §3.2.2. Il existe donc un corps algébriquement clos K tel que

$$A \simeq K_+ \qquad \text{et} \qquad B/C_B(A) \hookrightarrow K^\times,$$

où les morphismes sont définissables. La caractéristique de K est le nombre premier p.

D'autre part, d'après le Fait 1.8.3, $B \cap B^w$ est abélien. En particulier $T[w] = d(T[w])$ est un groupe abélien définissable d'après la Remarque 3.1.26.

Prouvons que $T[w]$ se plonge définissablement dans $K^\times$. Pour cela montrons $T[w] \cap C_B(A) = 1$. Soit en effet $t \in C_{T[w]}(A)$. Si $t \neq 1$, alors $A, A^w \leq C^\circ(t)$, et l'on arrive grâce au Lemme 1.8.5 à $B = B^w$, une contradiction. Ainsi $T[w] \cap C(A) = 1$, et donc $T[w] \hookrightarrow B/C_B(A) \hookrightarrow K^\times$, où les injections sont définissables.

Pourtant si $t \in T[w]^\#$, le théorème de Wagner, Fait 1.6.3, impose que la clôture définissable $d(t) \leq T[w]$ ne peut pas être sans torsion, une contradiction avec le Lemme 3.3.9. □

Le Lemme 3.3.10 précise de manière un peu inattendue la caractéristique, et introduit une rupture remarquable de la symétrie entre les configurations $p < \infty$ et $p = \infty$. Le lecteur soucieux de préserver ce parallélisme, ou désirant faire l'économie d'un résultat de théorie des modèles, peut cependant poursuivre comme si de rien n'était cet article, en envisageant l'éventualité $p < \infty$ jusqu'à après la Proposition 3.3.25. La théorie des intersections maximales de Burdges impliquerait alors que B est sans q-unipotence pour chaque nombre premier q, et en particulier que $p = \infty$. Il suffit pour arriver jusque là sans le Lemme 3.3.10 de faire les ajustements nécessaires au cas $p < \infty$, c'est-à-dire essentiellement utiliser le Lemme 1.8.5 partout où apparaît le Lemme 1.9.1 ou le Corollaire 1.9.4.

En caractéristique ∞, la preuve continue sans recourir à un résultat aussi modèle-théorique. Le paramètre d'unipotence $\tilde{p}$ défini dans la Notation 3.1.5 est de la forme (∞, d), avec $d > 0$.

Fermant cette parenthèse, on revient au Lemme 3.3.9, et l'on en déduit avec le Fait 1.4.1 que la clôture définissable $d(T[w])$ est telle que

$$T[w] \subseteq d(T[w])^\circ \text{ et } d(T[w]) \text{ est un groupe connexe.}$$

On va maintenant "éloigner autant que possible" $T[w]$ de $F^\circ(B)$. Commençons par un argument où l'hypothèse $w \in I_0$, à savoir $\mathrm{rg}(T[w]) \geq \mathrm{rg}((F^\circ(B))^{-i})$, est cruciale.

Lemme 3.3.11 *Soit $w \in I_0$. Alors aucune involution de B n'inverse $T[w]$.*

Preuve

Soit j une involution de B inversant $T[w]$. Si $t \in T[w]^\#$, alors j inverse la clôture définissable $d(t)$. Avec le Fait 1.7.4 et les Lemmes 3.1.3 et 3.3.9, il vient $d(t) \subseteq (F^\circ(B))^{-j}$. Ceci prouve que l'ensemble $T[w]$ est inclus dans $(F^\circ(B))^{-j}$. En particulier, $d(T[w])$ est inclus dans $F^\circ(B)$, et donc il est nilpotent. C'est ainsi un sous-groupe définissable connexe nilpotent inclus dans les deux sous-groupe de Borel distincts B et B^w. En particulier, d'après le Corollaire 1.8.34, $d(T[w])$ est abélien. Alors grâce à la Remarque 3.1.26, $T[w] = d(T[w])$ est un groupe abélien définissable.

D'autre part, d'après la définition de I_0 auquel w appartient, $T[w]$ est un sous-groupe définissable générique de l'ensemble définissable $(F^\circ(B))^{-j}$. Comme ce dernier est de degré 1, $T[w]$ est alors *l'unique* sous-groupe définissable générique de $(F^\circ(B))^{-j}$. En particulier, $C^\circ(j)$ le normalise.

Mais alors le groupe $T[w] \rtimes C^\circ(j)$ est générique dans B, et donc $B = T[w] \rtimes C^\circ(j)$. En particulier $B = N^\circ(T[w])$ et w normalise B, une contradiction. □

Corollaire 3.3.12 *Soit $w \in I_0$. Alors $T[w] \not\subseteq F^\circ(B)$.*

Preuve

Supposons que $T[w] \subseteq F^\circ(B)$. Alors $X = C^\circ(T[w])$ contient $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$, qui est inclus dans un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow $\hat{U}$ de X. D'après le Corollaire 2.1.6, une involution w_1 conjuguée sous X à w normalise $\hat{U}$. Maintenant le Lemme 1.9.1 avec $A = U = U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ implique que $U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de G contenant $\hat{U}$. Ce dernier étant w_1-invariant, il vient $U_{\tilde{p}}(B) = U_{\tilde{p}}(B)^{w_1}$. Passant aux normalisateurs connexes et grâce au Théorème 3.1.10, on a $w_1 \in B$. Or w_1, tout comme w, inverse $T[w]$. Ceci contredit le lemme 3.3.11. □

On renforce ce dernier résultat.

Lemme 3.3.13 *Soit $w \in I_0$. Alors il existe t dans $T[w]^{\#}$ dont la clôture définissable $d(t)$ ne centralise pas $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$.*

Preuve
Supposons au contraire que $d(t)$ centralise $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ pour tout $t \in T[w]^{\#}$. Il vient alors $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \leq C^\circ(d(t))$. Soit $\hat{U}$ un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de $C^\circ(d(t))$ contenant $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$. Comme $C^\circ(d(t))$ est w-invariant, d'après le Corollaire 2.1.6 il existe une involution w_1 conjuguée sous $C^\circ(d(t))$ à w et qui normalise $\hat{U}$. Nous argumentons alors comme dans la preuve du Corollaire 3.3.12. Le Lemme 1.9.1 avec $A = U = U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ implique que $U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de G contenant $\hat{U}$. Ce dernier étant w_1-invariant, il vient $U_{\tilde{p}}(B) = U_{\tilde{p}}(B)^{w_1}$. Passant aux normalisateurs connexes et grâce au Théorème 3.1.10, on a $w_1 \in B$.

Tout comme w, l'involution w_1 de B inverse $d(t)$. Donc $d(t) \leq F^\circ(B)$ grâce au Fait 1.7.4 et au Lemme 3.3.9. Cela étant vrai pour tout $t \in T[w]^{\#}$, nous avons montré $T[w] \subseteq F^\circ(B)$, une contradiction avec le Corollaire 3.3.12. □

Corollaire 3.3.14 *Soit $w \in I_0$. Alors il existe un entier $s \geq 1$ et un (∞, s)-sous-groupe abélien de $d(T[w])$ qui est inclus dans $T[w]$ et qui ne centralise pas $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$.*

Preuve
La clôture définissable $d(t)$ du Lemme 3.3.13 est un groupe définissable abélien non-trivial et sans torsion d'après le Lemme 3.3.9. D'après le Fait 1.4.1 et par choix de t, il en va de même du quotient $\overline{d(t)}$ dans la projection modulo $C_{d(t)}(U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))))$. Selon le Fait 1.8.14, $\overline{d(t)}$ admet un paramètre d'unipotence qui est nécessairement de la forme (∞, s) avec $s \geq 1$. Maintenant le Fait 1.8.17 (2) implique qu'il existe un (∞, s)-sous-groupe définissable de $d(t)$ qui n'est pas nul dans la projection, c'est-à-dire qui ne centralise pas $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$. Ce sous-groupe convient. □

Notation 3.3.15 *Soient, comme dans le Corollaire 3.3.14, s un entier ≥ 1 et T_s un (∞, s)-groupe abélien inclus dans $T[w]$. (Ainsi a-t-on $T_s \not\leq C^\circ(U_{\tilde{p}}(Z(F(B)))))$.*

Faisons aussitôt trois remarques à garder à l'esprit.

Remarque 3.3.16

1. *$T_s \not\leq F^\circ(B)$, par définition.*
2. *$1 \leq s < d_\infty(B)$, car sinon $T_s \leq F^\circ(B)$ avec le Fait 1.8.23.*
3. *Aucune involution de B n'inverse T_s (cf. début de la preuve du Lemme 3.3.11).*

3.3.3 Commutativité de $B \cap B^w$

Un grand pas vers la compréhension de $T[w]$ se fait dans la proposition suivante.

Proposition 3.3.17 *Soit $w \in I_0$. Alors $B \cap B^w$ est abélien.*

Avant la preuve de cette importante proposition, en voici un corollaire très instructif sur $T[w]$, qui était jusqu'ici bien mystérieux.

Corollaire 3.3.18 *Soit $w \in I_0$. Alors $T[w]$ est un groupe abélien définissable et connexe.*

Preuve
Une fois établi dans la Proposition 3.3.17 que $B \cap B^w$ est abélien, il suffira d'appliquer la Remarque 3.1.26 et le point mentionné au-dessus du Lemme 3.3.11. □

Nous prouvons désormais la Proposition 3.3.17. Soit $w \in I_0$ et supposons $(B \cap B^w)' \neq 1$. Soient $X = F^\circ(B) \cap F^\circ(B^w) \neq 1$ et $N = N^\circ(X)$.

Lemme 3.3.19 $d_\infty(N) > d$ *(voir Notation 3.1.5).*

Preuve

$U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \leq N$. Si l'on a l'égalité $d_\infty(N) = d$, alors $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \leq U_{\tilde{p}}(N) \leq F^\circ(N)$ d'après le Fait 1.8.23. Pourtant d'après le Lemme 1.9.1, où $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ joue les deux rôles, $U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$. En particulier $U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{p}}(N)$. Comme ce dernier est w-invariant, $U_{\tilde{p}}(B)$ et B le sont aussi, et le Théorème 3.1.10 implique $w \in B$, une contradiction. □

Corollaire 3.3.20 $Z(F^\circ(B)) \leq C(i)$.

Preuve

Sinon le groupe $Y = (Z(F^\circ(B)))^{-i} \neq 1$ est normal dans B et inversé par chaque involution de B d'après le Lemme 3.1.3.

Soit maintenant $\hat{U}$ un $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de N contenant $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$. Comme w normalise N, d'après le Corollaire 2.1.6, il existe une involution w_1 conjuguée à w sous N et qui normalise $\hat{U}$. Mais le Lemme 1.9.1 où $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ joue les deux rôles, implique que $U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G qui contient $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$, et en particulier l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G qui contient $\hat{U}$. Comme ce dernier est w_1-invariant, il vient $w_1 \in N(U_{\tilde{p}}(B)) = N(B)$, et le Théorème 3.1.10 implique $w_1 \in B$.

D'après les Lemmes 3.1.8 et 3.3.19, l'involution w_1 inverse $U_\infty(N)$. Mais elle inverse aussi $Y \leq N$. Avec le Lemme 1.3.1, il vient $U_\infty(N) \leq C^\circ(Y) \leq B$, une contradiction au Lemme 3.3.19. □

Lemme 3.3.21 *X est $\tilde{p}$-homogène.*

Preuve

D'après le Corollaire 3.3.20 et le Lemme 3.1.3, $F^\circ(B)$ n'est pas abélien. Selon le Fait 1.8.4, $F(B) \cap F(B^w)$ est sans torsion. En particulier $X = F(B) \cap F(B^w) = (F(B) \cap F(B^w))^\circ$ est sans torsion. Il est $\tilde{q}$-homogène pour un certain paramètre d'unipotence $\tilde{q}$ selon le Lemme 1.10.1.

Une conséquence du Lemme 3.3.19 est que $N \not\leq B$. En particulier, $(N \cap B)^\circ = N_B^\circ(X)$ est inclus dans deux sous-groupes de Borel distincts. D'après le Fait 1.8.32, son dérivé $Y = (N_B^\circ(X))'$ est homogène. Y n'est pas trivial car $Y \geq (B \cap B^w)' \neq 1$. Soit $\tilde{r} = (\infty, \ell)$ l'unique paramètre d'unipotence de Y.

Maintenant $K = [T_s, U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))]$ est un $\tilde{p}$-groupe $\tilde{p}$-homogène d'après le Fait 1.8.26, et non-trivial par choix de T_s, Notation 3.3.15. Comme $T_s \leq B \cap B^w \leq B \cap N$ et que d'autre part $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B))) \leq C_B(X) \leq B \cap N$, on a $K \leq (N_B^\circ(X))' = Y$. En particulier $\tilde{p} = \tilde{r}$ et Y est $\tilde{p}$-homogène.

Comme X est sans torsion, $(B \cap B^w)'$ supposé non-trivial est un groupe connexe. Il est inclus dans X et dans Y qui sont chacun homogène, et donc il vient $\tilde{q} = \tilde{r} = \tilde{p}$. Ainsi X est $\tilde{p}$-homogène. □

Preuve de la Proposition 3.3.17

D'après le Lemme 3.3.21 et la décomposition centrale du Fait 1.8.18, $F_s(B) \leq C^\circ(X) \leq N$. Comme $N \not\leq B$ d'après le Lemme 3.3.19, le Corollaire 1.8.34 implique que $F_s(B)$ est abélien, et donc central dans $F^\circ(B)$ toujours d'après le Fait 1.8.18. Le Corollaire 3.3.20 implique alors que i centralise $F_s(B)$, lequel contient $U_{(\infty,s)}(B')$.

D'après le Fait 1.5.1, S° est inclus dans un sous-groupe de Carter Q de B. En parituclier i est centrale dans Q, et centralise donc $U_{(\infty,s)}(H') \cdot U_{(\infty,s)}(Q)$, qui est un (∞, s)-sous-groupe de Sylow de H d'après le Fait 1.8.30.

Comme les sous-groupes de cette nature sont conjugués dans B et que T_s est inclus dans l'un d'eux, il vient qu'une B-conjuguée de i centralise T_s, ce qui contredit le Corollaire 3.3.8. □

Le Corollaire 3.3.18 est maintenant lui aussi démontré.

3.3.4 Une intersection non abélienne de paire maximale

Nous allons à présent utiliser la théorie des intersections de paires maximales de sous-groupes de Borel dans les groupes simples connexes minimaux. La première étape consiste à nous ramener au cas des intersections *non-abéliennes* pour utiliser l'artillerie des §1.8.7 et 1.10. Ceci nous permettra de progresser dans l'étude de B, ce que nous ferons en §3.3.5.

Depuis le Lemme 3.3.10, nous savons que $p = \infty$. Rappelons de la Proposition 3.3.17 et du Corollaire 3.3.18 que si $w \in I_0$, alors $B \cap B^w$ est abélien, et $T[w]$ en est un sous-groupe définissable connexe. Fixons comme dans la Notation 3.3.15 un (∞, s)-sous-groupe T_s de $T[w]$ qui ne centralise pas $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$. Ces rappels énoncés, nous reprenons.

Lemme 3.3.22 *Il existe un sous-groupe de Borel distinct de B et contenant $C^\circ(T_s)$.*

Preuve
$C^\circ(T_s)$ est inclus dans un sous-groupe de Borel ; si c'est B, on conjugue par w, et $B^w \neq B$ convient. □

Notation 3.3.23 *Soit $B_M \neq B$ un sous-groupe de Borel contenant $C_B^\circ(T_s)$, distinct de B, et maximisant $H = (B \cap B_M)^\circ$ parmi de telles intersections.*

Ecrivons pour fixer les idées que

$$T_s \leq T[w] \leq (B \cap B^w)^\circ \leq C_B^\circ(T_s) \leq H.$$

Nous montrerons que la paire (B, B_M) est maximale, à l'aide du Fait 1.8.31. Pour ce faire, nous allons dans la Proposition 3.3.25 prouver la non-abélianité de H, ce qui est notre première étape.

Lemme 3.3.24 *Soit B_M comme dans la Notation 3.3.23. Alors $F^\circ(B_M)$ est sans involution.*

Preuve
Si $F^\circ(B_M)$ possède une involution k, alors k est torique dans $F^\circ(B_M)$ et centrale dans B_M. En particulier le centralisateur de $k \in i^G$ est un sous-groupe de Borel, une contradiction. □

Proposition 3.3.25 *H n'est pas abélien.*

Preuve
Supposons H abélien. Il vient $H = C_B^\circ(T_s)$. Le groupe abélien H est inclus dans $C^\circ(T_s)$, donc $2^\perp$. Selon le Fait 1.5.3, H n'est pas un sous-groupe de Carter de B, et $H < N_B^\circ(H)$. Si B_2 est un sous-groupe de Borel distinct de B et contenant $N^\circ(H)$, alors $C_B^\circ(T_s) = H < N_B^\circ(H) \leq (B \cap B_2)^\circ$, une contradiction à la maximalité de H. Ainsi B est l'*unique* sous-groupe de Borel contenant $N^\circ(H)$. En particulier $N_{C^\circ(T_s)}^\circ(H) \leq C_B^\circ(T_s) = H$, et H est un sous-groupe de Carter de $C^\circ(T_s)$.

D'après le Corollaire 2.1.5, il existe une involution w_1 conjuguée à w sous $C^\circ(T_s)$ et qui normalise H. Puisque B est le seul sous-groupe de Borel contenant $N^\circ(H)$, il vient $w_1 \in N(B)$, et donc $w_1 \in B$ d'après le Théorème 3.1.10. L'involution w_1, tout comme w, inverse T_s, une contradiction à la Remarque 3.3.16 (3). □

La paire de sous-groupes de Borel (B, B_M) est maximale. En effet soit B_2 un sous-groupe de Borel distinct de B, et tel que $(B \cap B_2) \geq H$. Alors $B_2 \geq H \geq C_B^\circ(T_s)$, donc B_2 est comme dans la Notation 3.3.23. D'après la maximalité de H *au sens de la Notation 3.3.23*, on a $(B \cap B_2)^\circ = H$. Ainsi H est maximal *au sens du Fait 1.8.31 (3)*, ce qui implique que la paire (B, B_M) est maximale au sens de §1.8.7.

Nous voici donc sous les hypothèses typiques des §1.8.7 et 1.10. Sans perdre de vue que notre but principal est l'étude du sous-groupe de Borel B, commençons par déterminer $d_\infty(H')$, degré d'unipotence du dérivé de l'intersection H.

Lemme 3.3.26 $d_\infty(H') = s$.

Preuve
Sinon, d'après le Fait 1.8.32, $U_{(\infty,s)}(H') = 1$. En particulier, le Fait 1.8.30 impose que les (∞, s)-sous-groupes de Sylow de H sont de la forme $U_{(\infty,s)}(Q)$, pour Q un sous-groupe de Carter de H. Ainsi T_s est inclus dans un sous-groupe de Carter Q de H.

Par ailleurs Q n'est pas sous-groupe de Carter de B. En effet s'il l'est, il contient un 2-sous-groupe de Sylow S_1 de B d'après le Corollaire 1.5.3. Ce 2-sous-groupe de Sylow est connexe d'après le Fait 1.4.4, et torique en l'absence de 2-unipotence. Mais comme Q est nilpotent, le 2-tore S_1 est central dans Q. En particulier T_s commute à S_1, une contradiction au Corollaire 3.3.8. Donc Q n'est pas un sous-groupe de Carter de B. En particulier, $N_B^\circ(Q) > Q$.

Comme dans le Lemme 1.10.2, on note $r' = d_\infty(H)$ et $Q_{r'} = U_{(\infty,r')}(Q)$. Ce sous-groupe est non-trivial et central dans H d'après le Lemme 1.10.2. Si $N_B^\circ(Q_{r'}) = H$, alors comme $N^\circ(Q) \leq N^\circ(Q_{r'})$, il vient $N_B^\circ(Q) \leq H$. Or $N_H^\circ(Q) = Q$, donc Q est un sous-groupe de Carter de B, une contradiction. Ainsi $N_B^\circ(Q_{r'}) > H$. L'examen de la trichotomie du Lemme 1.10.2 ne laisse alors subsister que le cas où B est l'unique sous-groupe de Borel contenant $N^\circ(Q_{r'})$. En particulier $N(Q) \leq N(B)$.

Il vient $N_{C(T_s)}^\circ(Q) \leq C_B^\circ(T_s) \leq H$ par choix de H, donc Q est un sous-groupe de Carter de $C^\circ(T_s)$. D'après le Corollaire 2.1.5, il existe une involution w_1 conjuguée à w sous $C^\circ(T_s)$ et qui normalise Q. Alors $w_1 \in N(Q) \leq N(B)$, donc $w_1 \in B$ d'après le Théorème 3.1.10. L'involution w_1, conjuguée à w par $C^\circ(T_s)$, inverse T_s, une contradiction à la Remarque 3.3.16 (3). □

La théorie générale de §1.8.7 nous apprend l'"asymétrie" de la configuration, à savoir l'inégalité $d_\infty(B) \neq d_\infty(B_M)$. Nous précisons par le lemme suivant.

Lemme 3.3.27 $d > d_\infty(B_M)$ *(voir Notation 3.1.5).*

Preuve
Supposons au contraire $d_\infty(B_M) > d_\infty(B)$. D'après le Fait 1.8.33 (4), pour chaque $\ell \neq d_\infty(H')$ on a alors $F_\ell(B) \leq Z(H)$. Mais grâce au Lemme 3.3.26 et à la Remarque 3.3.16 (2), il vient $d_\infty(H') = s < d_\infty(B) = d$. Ainsi $U_{\tilde{p}}(B) = F_d(B) \leq Z(H) \leq C(T_s)$, contre la Notation 3.3.15. □

Terminons l'étude de la configuration décrite dans le Fait 1.8.33 par celle des sous-groupes de Carter. Soit Q un sous-groupe de Carter de H. D'après le Fait 1.8.33 (5) et au vu du Lemme 3.3.27, Q est un sous-groupe de Carter de B. Mais un sous-groupe de Carter de B en contient un 2-sous-groupe de Sylow d'après le Corollaire 1.5.3. A B-conjugaison près, on peut donc supposer que $S^\circ \leq Q \leq H$.

Notation 3.3.28 *Soit Q un sous-groupe de Carter de H contenant S°.*

Lemme 3.3.29 *Q est un sous-groupe de Carter de G.*

Preuve
$\{i\} = I(Q)$ est caractéristique dans Q, donc $N_G^\circ(Q) \leq C^\circ(i) \leq B$. Ainsi $N_G^\circ(Q) \leq N_B^\circ(Q) = Q$. □

3.3.5 Conséquences dans B

Nous tirons maintenant parti de l'étude menée en §3.3.4 de la paire maximale d'intersection non-abélienne (B, B_M) pour préciser finement la structure de B. Commençons par donner un résumé des informations les plus pertinentes que nous venons d'obtenir.

B_M est un sous-groupe de Borel distinct de B et contenant $C_B^\circ(T_s)$.

$H = (B \cap B_M)^\circ$ est l'intersection d'une paire maximale.

H n'est pas abélien d'après la Proposition 3.3.25.

$d_\infty(H') = s$ d'après le Lemme 3.3.26.

$d_\infty(B) > d_\infty(B_M)$ d'après le Lemme 3.3.27.

$i \in S^\circ \leq H$ d'après la Notation 3.3.28.

Lemme 3.3.30 *B est l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(F_s(B))$.*

Preuve

C'est le Fait 1.8.33 (6). □

Notation 3.3.31 *On note $\Sigma = F_s(H) = U_{(\infty,s)}(H)$. (voir Fait 1.8.33 (3).)*

Lemme 3.3.32 *Σ est un (∞, s)-sous-groupe de Sylow abélien et sans involution de B. En outre $T[w] \le \Sigma \le F^\circ(B_M)$ et $N^\circ(\Sigma) \le B_M$.*

Preuve

Le Fait 1.8.33 (3) implique $N^\circ(\Sigma) \le B_M$. En particulier, si W est un (∞, s)-sous-groupe de Sylow de B contenant Σ, alors $N^\circ_W(\Sigma) \le H$, et $U_{(\infty,s)}(N^\circ_W(\Sigma)) = \Sigma$. Avec la condition de normalisateur 1.8.27, il vient $\Sigma = W$, et Σ est donc un (∞, s)-sous-groupe de Sylow de B.

Le groupe Σ est définissable, connexe, nilpotent, et inclus dans les deux sous-groupes de Borel distincts B et B_M. Le Corollaire 1.8.34 implique alors qu'il est abélien. $\Sigma \le F^\circ(B_M)$ d'après le Fait 1.8.33 (3). Cela implique au vu du Lemme 3.3.24 que Σ est sans involution.

Nous montrons à présent que $T[w]$ est un (∞, s)-sous-groupe de H. Pour cela, nous montrons même que $T[w]$ est (∞, s)-homogène. Ceci achèvera la preuve, puisqu'il en découlera $T[w] \le \Sigma$ par définition de Σ. Supposons que $U_{(\infty,\ell)}(T[w]) \neq 1$ pour un $\ell \neq s$. Alors les Faits 1.8.32 et 1.8.30 font que $U_{(\infty,\ell)}(T[w])$ est inclus dans un sous-groupe de Carter de H. Or chaque sous-groupe de Carter de H, comme Q défini dans la Notation 3.3.28, contient dans son centre un 2-sous-groupe de Sylow de B. Un élément non trivial de $T[w]$ commute donc avec une involution torique, ce qui contredit le Corollaire 3.3.8. Ainsi $U_{(\infty,\ell)}(T[w]) = 1$ pour chaque $\ell \neq s$. Comme en outre $T[w]$ est sans torsion d'après le Lemme 3.3.9 et le Corollaire 3.3.18, on en déduit que $T[w]$ est un (∞, s)-groupe (∞, s)-homogène. Ceci termine la preuve du lemme. □

Notation 3.3.33 *Soit $K = \Sigma^{-i}$.*

Bien noter qu'a priori, cette définition dépend de w, de B_M, et de i dans H. Le groupe K permet enfin de scinder B.

Lemme 3.3.34 *$K = (F^\circ(B))^{-i}$ ne dépend que de B, et $B = K \rtimes C^\circ(i)$. En outre K est un (∞, s)-groupe et $\mathrm{rg}(K) = \mathrm{rg}(T[w])$. Enfin B est l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(K)$.*

Preuve

L'inclusion $K \subseteq (F^\circ(B))^{-i}$ est claire avec le Fait 1.7.4, puisque $K \le \Sigma$ qui est sans involution d'après le Lemme 3.3.32.

Maintenant Σ étant $2^\perp$, on a $\Sigma = C_\Sigma(i) \times K$. Or $C_\Sigma(i) \cap T[w] = 1$ d'après le Corollaire 3.3.8. Il vient $\mathrm{rg}(T[w]) \le \mathrm{rg}(\Sigma) - \mathrm{rg}(C_\Sigma(i)) = \mathrm{rg}(K) \le \mathrm{rg}((F^\circ(B))^{-i}) \le \mathrm{rg}(T[w])$, la dernière inégalité provenant de l'hypothèse $w \in I_0$. Ainsi $\mathrm{rg}(K) = \mathrm{rg}(T[w]) = \mathrm{rg}((F^\circ(B))^{-i})$.

A présent nous employons le même argument que pour prouver le Lemme 3.3.11. Le groupe K est l'unique sous-groupe définissable générique de l'ensemble $(F^\circ(B))^{-i}$ qui est de degré 1. En particulier, K est normalisé par $C^\circ(i)$, et donc $K \rtimes C^\circ(i)$ est un sous-groupe générique de B qui est connexe. On a ainsi $B = K \rtimes C^\circ(i)$. Comme $F^\circ(B)$ est $2^\perp$, on raisonne comme dans le Lemme 3.2.13 pour prouver que $K = (F^\circ(B))^{-i}$. Mais cela prouve aussi que K ne dépend que de B.

Pour conclure, $K = [\Sigma, i] \le H'$ est un (∞, s)-sous-groupe de Σ au vu du Fait 1.8.32. En outre $K \le H' \le F(B) \cap F(B_M) = F_s(B)$ d'après le Fait 1.8.33 (6). En particulier, $C^\circ(F_s(B)) \le C^\circ(K)$. Le Lemme 3.3.30 implique alors que B est l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(K)$. Tous les points sont prouvés. □

Remarque 3.3.35 *K et $T[w]$ partagent ainsi certaines propriétés. On va montrer dans le Lemme 3.3.39 ci-dessous qu'ils sont en fait conjugués dans G.*

Corollaire 3.3.36 *B_M est sans q-unipotence pour chaque nombre premier q.*

Preuve
$K \leq \Sigma \leq F^\circ(B_M)$ d'après le Lemme 3.3.32. Si $U_q(B_M) \neq 1$, alors $U_q(B_M) \leq C^\circ(K) \leq B$ d'après le Lemme 3.3.34. En particulier, $U_q(B_M) \leq B \cap B_M$, et le Lemme 1.8.5 impose $B = B_M$, une contradiction. □

Lemme 3.3.37 $\Sigma = C^\circ_{F_s(B_M)}(T[w])$.

Preuve
Puisque $T[w] \leq \Sigma \leq F_s(B_M)$ et que Σ est abélien, l'inclusion $\Sigma \leq C^\circ_{F_s(B_M)}(T[w])$ est claire. Supposons-la stricte. Soit alors $z \in C^\circ_{F_s(B_M)}(T[w]) \setminus \Sigma$. Comme $i \in B_M$ normalise $F_s(B_M)$ et que $F_s(B_M)$ est $2^\perp$ d'après le Lemme 3.3.24, le Fait 1.3.2 donne une décomposition univoque $F_s(B_M) = C_{F_s(B_M)}(i) \cdot (F_s(B_M))^{-i}$, chaque ensemble dans ce produit étant de degré 1 par connexité de $F_s(B_M)$. Ainsi $C_{F_s(B_M)}(i) = C^\circ_{F_s(B_M)}(i) \leq C^\circ(i) < B$, donc $C_{F_s(B_M)}(i) \leq (B \cap B_M)^\circ = H$. Mais d'après le Fait 1.8.21, $C_{F_s(B_M)}(i)$ est un (∞, s)-groupe, donc $C_{F_s(B_M)}(i) \leq U_{(\infty,s)}(H) = \Sigma$ selon la Notation 3.3.31. Ainsi peut-on même supposer que $z \in (F_s(B_M))^{-i}$, de sorte que $z^i = z^{-1}$.

Alors pour $t \in (T[w])^\#$, on a $[z, t] = 1$, donc $[z^i, t] = 1$, et $[z, t^i] = 1$. En particulier, z commute à $[t, i] \in [T[w], i] \leq [\Sigma, i] \leq K$. Or $[t, i] \neq 1$ d'après le Corollaire 3.3.8. Mais B est l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(K)$ d'après le Lemme 3.3.34, et donc à plus forte raison l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ([t, i])$. Comme ce dernier est normalisé par z, il vient $z \in N(B)$.

Soit n l'ordre de $N(B)/B$, de sorte que $z^n \in B$. D'après le Corollaire 3.3.36, la torsion de $F^\circ(B_M)$ est torique, et donc centrale dans B_M. En particulier elle est centralisée par $i \in H \leq B_M$. Comme $F^\circ(B_M)$ est $2^\perp$ d'après le Lemme 3.3.24, le seul élément d'ordre fini de $F^\circ(B_M)$ inversé par i est 1. La clôture définissable $d(z)$, inversée par i et incluse dans $F^\circ(B_M)$, est donc sans torsion. En particulier $z^n \in B \Rightarrow z \in B$ d'après le Fait 1.4.1. La décomposition donnée dans le Lemme 3.3.34 implique une écriture $z = kc$ pour un $k \in K$ et un $c \in C^\circ(i)$. Il vient $k^{-1}z = c = c^i = (k^{-1}z)^i = k^{-i}z^i = kz^{-1}$, d'où $z^2 = k^2 \in K$. Ainsi l'image de z dans $d(z)/(d(z) \cap K)$ est d'ordre ≤ 2. Comme $d(z)$ est sans torsion, le Fait 1.4.1 implique $z \in K$. Or avec la Notation 3.3.31 et le Lemme 3.3.34, $K \leq U_{(\infty,s)}(H) = \Sigma$, donc $z \in \Sigma$, une contradiction. □

Proposition 3.3.38 *Σ est un (∞, s)-sous-groupe de Sylow de $C^\circ(T[w])$.*

Preuve
Rappelons que $d_\infty(H') = s$ d'après le Lemme 3.3.26. Soit U un (∞, s)-sous-groupe de $C^\circ(T[w])$ contenant $\Sigma = U_{(\infty, d_\infty(H'))}(H)$. D'après le Lemme 1.10.3, on a $U \leq B_M$.

Selon le Lemme 3.3.29, un sous-groupe de Carter de H est un sous-groupe de Carter de G. On peut alors appliquer le Lemme 1.10.4, et $F_s(B_M)$ est donc l'unique (∞, s)-sous-groupe de Sylow de B_M. En particulier $U \leq F_s(B_M)$.

Ainsi il vient $\Sigma \leq U \leq C^\circ_{F_s(B_M)}(T[w]) = \Sigma$ avec le Lemme 3.3.37, et Σ est donc un (∞, s)-sous-groupe de Sylow de $C^\circ(T[w])$. □

3.3.6 Retour à $T[w]$ et contradiction finale

Dans cette sous-section nous conjuguons les sous-groupes $T[w]$ au sous-groupe K, ce qui permet de prouver que les G-conjugués de K se concentrent génériquement dans B.

Lemme 3.3.39 *Soit w dans I_0. Alors il existe $g \in G$ tel que $T[w] = K^g$.*

Preuve
D'après la Proposition 3.3.38, Σ est un (∞, s)-sous-groupe de Sylow de $C^\circ(T[w])$. D'après le Corollaire 2.1.6, il existe une involution w_1 conjuguée à w par $C^\circ(T[w])$ et qui normalise Σ. Mais alors w_1 inverse $T[w]$. D'autre part $w_1 \notin N(B)$. En effet, sinon w_1 est d'après le Théorème 3.1.10 une involution de B inversant $T[w]$, une contradiction à la Remarque 3.3.16 (3). On a $\mathrm{rg}(T[w_1]) \geq \mathrm{rg}(T[w]) \geq \mathrm{rg}(F^\circ(B))^{-i}$ puisque $w \in I_0$. Ainsi $w_1 \in I_0$.

Toute l'analyse précédente pour w vaut encore pour w_1. En particulier $T[w_1]$ est un groupe abélien, définissable et connexe d'après le Corollaire 3.3.18. Son rang est exactement celui de K d'après le Lemme 3.3.34. L'inclusion $T[w] \subseteq T[w_1]$ se transforme ainsi en égalité de groupes.

Maintenant i et w_1 normalisent Σ. Comme elles sont toutes deux toriques, le Corollaire 3.3.4 impose que i et w_1 sont conjuguées dans $N(\Sigma)$. Il existe donc $g \in N(\Sigma)$ tel que $w_1 = i^g$. Ainsi

$$T[w] = T[w_1] \leq \Sigma^{-w_1} = (\Sigma^{-i})^g = K^g,$$

et l'égalité de rangs dans le Lemme 3.3.34 implique l'égalité de ces sous-groupes. $\square$

Lemme 3.3.40 *Soit $g \in G$. Alors $K \cap K^g \neq 1$ si et seulement si $g \in N(B)$. On a de plus $i^G \cap N(K^g) = (iK)^g$, et toutes ces involutions sont K^g-conjuguées.*

Preuve

Si $g \in N(B) = N(K)$ d'après le Lemme 3.3.34, on a $K = K^g$, donc un sens est trivial. Soit pour la réciproque $g \in G$ tel que $K \cap K^g \neq 1$. L'involution i normalise $K \cap K^g$ et $N = N^\circ(K \cap K^g)$. On sait depuis le Lemme 3.3.10 que $p = \infty$. Il est clair que $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ et $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B^g)))$ sont inclus dans N, de sorte que $d_\infty(N) \geq d_\infty(B)$. Nous disons que $d_\infty(N) = d_\infty(B)$. En effet si $d_\infty(N) > d_\infty(B)$, alors i inverse $U_\infty(N)$ d'après le Lemme 3.1.8. Il vient $[K \cap K^g, U_\infty(N)] = 1$ grâce au Lemme 1.3.1. En particulier $U_\infty(N) \leq C^\circ(K \cap K^g) \leq B$ avec le Lemme 3.3.34, une contradiction. Ainsi $d_\infty(N) = d_\infty(B)$, et $U_{\tilde{p}}(N)$ est un $\tilde{p}$-groupe. Alors le Lemme 1.9.1 appliqué avec $U = A = U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ donne que $U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{p}}(N)$. Mais le même argument donne aussi que $U_{\tilde{p}}(B^g)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{p}}(N)$. Il vient $U_{\tilde{p}}(B) = U_{\tilde{p}}(B^g)$ et $g \in N(B)$.

Enfin $I(N(K^g)) = I(N(K))^g = I(N(B))^g$. Or d'après le Théorème 3.1.10, les involutions toriques de $N(B)$ sont dans B. Ainsi $i^G \cap N(K^g) = I(B^g) = (iK)^g$ avec le Lemme 3.1.3. $\square$

Après cette analyse poussée des sous-groupes en présence, nous concluons par deux simples calculs de rang qui produisent la contradiction finale. Commençons par une conséquence du Lemme 3.3.40 précisant le Lemme 3.3.39.

Corollaire 3.3.41 *Soient $w_1, w_2 \in I_0$. Alors $T[w_1] \cap T[w_2] \neq 1$ si et seulement si $T[w_1] = T[w_2]$ si et seulement si w_1 et w_2 sont conjuguées par $T[w_1]$.*

Preuve

D'après le Lemme 3.3.39, $T[w_1] = K^{g_1}$ et $T[w_2] = K^{g_2}$ pour des éléments g_1 et g_2 de G. Si $T[w_1] \cap T[w_2] \neq 1$, on a d'après le Lemme 3.3.40 $g_2 g_1^{-1} \in N(K)$, d'où $T[w_1] = K^{g_1} = K^{g_2} = T[w_2]$. Le Lemme 3.3.40 prouve aussi que w_1 et w_2 sont conjuguées par $K^{g_1} = T[w_1]$. Enfin si $w_1 = w_2^t$ pour un $t \in T[w_1]^\#$, alors $t^{w_2} = w_2 t w_2 = w_1^{t^{-1}} t w_1^{t^{-1}} = t w_1 t^{-1} t t w_1 t^{-1} = t w_1 t w_1 t^{-1} = t t^{-1} t^{-1} = t^{-1}$. Ainsi t est inversé par w_1 et par w_2, et donc $T[w_1] \cap T[w_2] \neq 1$. $\square$

Corollaire 3.3.42 $\mathrm{rg}\left(\bigcup_{w \in I_0} T[w]\right) = \mathrm{rg}\,(G) - \mathrm{rg}\,(C(i))\,.$

Preuve

Selon le Corollaire 3.3.41,

$$\bigcup_{w \in I_0} T[w] = \coprod_{w \in I_0 \text{ modulo } T[w_1] = T[w_2]} T[w],$$

l'union disjointe étant indexée par un ensemble de rang $\mathrm{rg}(I_0) - \mathrm{rg}(T[w]) = \mathrm{rg}(i^G) - \mathrm{rg}(K)$ et chaque terme étant de rang $\mathrm{rg}(K)$ d'après le Lemme 3.3.34 ou le Lemme 3.3.39. Le rang calculé est donc $\mathrm{rg}(i^G) = \mathrm{rg}(G) - \mathrm{rg}(C(i))$. $\square$

D'autre part le Lemme 3.3.40 permet aussi de calculer $\mathrm{rg}(K^G)$.

Corollaire 3.3.43 $\mathrm{rg}\left(K^G\right) = \mathrm{rg}\,(G) - \mathrm{rg}\,(C(i))\,.$

Preuve

D'après le Lemme 3.3.34, $\mathrm{rg}(N(K)) = \mathrm{rg}(B)$. Maintenant grâce au Lemme 3.3.40, il vient $\mathrm{rg}\left(K^G\right) = \mathrm{rg}\,(G) - \mathrm{rg}\,(B) + \mathrm{rg}\,(K) = \mathrm{rg}\,(G) - \mathrm{rg}\,(B/K)$, et la factorisation du Lemme 3.3.34 permet de conclure. $\square$

Le Lemme 3.3.39 et les Corollaires 3.3.42 et 3.3.43 prouvent comme suit que les conjugués de K se retrouvent majoritairement dans B.

Corollaire 3.3.44 $\bigcup_{w\in I_0} T[w]$ *est un sous-ensemble générique de* K^G. *En particulier* $B \cap (K^G)$ *est générique dans* K^G.

Preuve du Théorème 3.3.1

Les Corollaires 1.2.2 et 3.3.44 contredisent la simplicité de G, et cette contradiction achève la preuve du Théorème 3.3.1. □

Le Théorème 3.0.1 est alors démontré, ainsi que son Corollaire 3.0.2. □

Nous rappelons que d'après le Fait 1.4.5, le Théorème 3.0.1 et le Corollaire 3.0.2 valent sans l'hypothèse de toricité de l'involution.

Chapitre 4

Entr'acte

Trois études forment ce chapitre. La première est une tentative de décrire un éventuel "monstre" de rang de Morley fini, à savoir un groupe simple connexe minimal de type impair et de rang 1 qui ne soit pas PSL_2. D'après le Théorème 3.0.1, il faut que le centralisateur connexe d'une involution soit un sous-groupe de Borel. Les calculs de rang avec les ensembles $T[w]$ sont alors impossibles. Ce qu'on gagne en revanche, c'est grâce à la monogamie du sous-groupe de Borel, un meilleur contrôle des intersections ; la détermination du groupe de Weyl est aisée. Très vite on ne sait plus rien dire, le théoricien des groupes manque de prise.

La deuxième prépare au travail en rang de Prüfer 2. On y considère, en s'appuyant sur l'importante *toricité* des involutions, la *cotoricité* d'involutions qui commutent dans un groupe de rang de Morley fini connexe de type impair. Le fait de contredire ce phénomène semble propre à PSL_2, si bien qu'on dépasse un peu le cadre des groupes simples connexes minimaux pour conjecturer une propriété caractéristique de PSL_2.

Enfin, la troisième est un retour sur la propriété d'extension dans les groupes simples connexes minimaux. On apportera une réponse à certains problèmes d'invariance ascendante.

4.1 Rang de Prüfer 1, si $C^\circ(i)$ est un sous-groupe de Borel

Prenez garde, Cibo, prenez garde à votre salut éternel, tout cardinal que vous êtes.
(Acte II, Scène 3)

Nous sommes toujours dans le cas où le groupe G est simple connexe minimal de type impair et de rang de Prüfer 1 ; en revanche on suppose à présent que $C^\circ(i)$ est un sous-groupe de Borel. Les deux voies possibles, selon la nature du groupe de Weyl, se transforment assez vite en impasses.

On suppose donc que $C^\circ(i)$ un sous-groupe de Borel, et l'on pousse l'analyse de la configuration aussi loin qu'on a su (ou voulu).

4.1.1 Notations et faits employés

Nous incluons ici des prérequis spécifiques, dont on n'avait pas l'usage dans l'analyse menant à PSL_2. Il faut justifier l'emploi d'une technologie à certains égards archaïsante, après avoir tant fait appel à l'unipotence de Burdges. C'est qu'ici, d'après la Remarque 4.1.5, une conjuguée de i n'appartient qu'à un seul conjugué de B. En particulier, l'utilisation du "radical impair" comme dans [CJ04] suffit amplement pour mener à bien la preuve de la Proposition 4.1.7 ci-dessous. Est-il besoin de préciser que malgré cet emploi, nous ne faisons pas l'hypothèse d'ordinarité ?

Commençons par un rappel.

Fait 1.8.6 ([CJ04, Lemma 2.41]) *Soit H un groupe résoluble de rang de Morley fini. Alors il existe un sous-groupe normal, définissable, connexe, et sans involution* maximal *de H, noté $O(H)$. De plus,* si H est ordinaire*, on a $O(H) \leq F^\circ(H)$.*

Fait 4.1.1 ([CJ04, Lemma 3.2]) *Soit H un groupe de rang de Morley fini connexe, résoluble, et de type impair. Si $O(H) = 1$, alors H est divisible abélien.*

Fait 4.1.2 ([CJ04, Lemma 3.4]) *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini. Soit B un sous-groupe définissable propre connexe, d'indice fini dans son normalisateur et tel que $\cup_{g \in G} B^g$ soit générique dans G. Soit $x \in N_G(B) \setminus B$ d'ordre $n > 1$ modulo B. On note $\langle x \rangle B$ l'union $B \cup xB \cup \cdots \cup x^{n-1}B$. Alors l'ensemble définissable*

$$X_1 = \{x_1 \in xB \text{ tels que } \exists g \in G \setminus N_G(B),\ x_1 \in (\langle x \rangle B)^g\}$$

est générique dans xB.

Fait 4.1.3 ([CJ04, Lemma 3.8]) *Soient H un groupe de rang de Morley fini* de type impair*, et S un 2-sous-groupe de Sylow de H. On suppose que $H^\circ \leq C_H(S^\circ)$ et que pour chaque $x \in H \setminus H^\circ$, il existe un entier n tel que les éléments du coset xH° soient génériquement d'ordre au plus n. Alors $C_H(S^\circ) = H^\circ$.*

Notation 4.1.4

G est un groupe simple connexe minimal de type impair et de 2-rang de Prüfer 1.

S est un 2-sous-groupe de Sylow de G et i est l'unique involution de S°.

On suppose que $C^\circ(i)$ est un sous-groupe de Borel de G.

Soit $B = C^\circ(i)$.

Remarque 4.1.5 *Comme i et B se 0-définissent l'un l'autre, on a $C(i) = N(B)$.*

4.1.2 Détermination du groupe de Weyl

Nous déterminons le groupe $N(B)/B$. La technique est celle de [CJ04].

Notation 4.1.6 *Soit $W = N(B)/B$.*

Proposition 4.1.7 *$W \hookrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Preuve

Supposons $W \neq 1$, et montrons $|W| = 2$. Soit $x \in N(B) \setminus B$ d'ordre n sur B. D'après le Fait 4.1.2, l'ensemble $X_1 = \{x_1 \in xB \text{ tels que } \exists g \in G \setminus N(B),\ x_1 \in (\langle x \rangle B)^g\}$ est générique dans xB.

Nous allons travailler modulo $O(B)$. Soit $H = (B \cdot \langle x \rangle)/O(B)$, de sorte que $H^\circ = B/O(B)$. Alors H° est de rang de Prüfer exactement 1 et $O(H^\circ) = 1$. C'est un groupe divisible abélien d'après le Fait 4.1.1. Donc $H^\circ = \mathrm{Tor}(H^\circ) \oplus D$ où D est divisible sans torsion et $\mathrm{Tor}(H^\circ)$ est somme d'un unique 2-tore noté τ et pour chaque q premier $\neq 2$ d'un nombre fini de q-tores.

Pour $g \in G \setminus N(B)$, on forme $T_g = (O(B) \cdot (B \cap B^g))/O(B) \leq H^\circ$. C'est un groupe définissable et $2^\perp$. En effet sinon, on trouve en relevant la torsion un 2-élément commun à B et à B^g. D'après la Remarque 4.1.5, il vient $B^g = B$, une contradiction.

Comme H° est abélien, T_g est normal dans H°, et en particulier $T_g^\circ \leq O(H^\circ) = 1$. Les groupes T_g forment donc une famille uniformément définissable de groupes *finis*. Par élimination des quanteurs infinis, il existe une borne sur leur ordre. Comme H° est abélien divisible, la borne sur $|T_g|$ implique $T_g \leq T_0$ pour un même sous-groupe *fini et indépendant de g*.

En particulier, si $x_1 \in X_1$, on a $x_1^n \in B \cap B^g$ pour un $g \notin N(B)$ et donc $\overline{x_1}^n \in T_0$ est d'ordre fini. Un sous-ensemble générique de $\bar{x}H^\circ$ est ainsi d'exposant borné.

Ceci vaut encore pour les autres cosets modulo H° de H, qui sont tous donnés par une puissance de $\bar{x}$. D'après le Fait 4.1.3, il vient $C_H(\tau) = H^\circ$. En particulier, l'action de $\bar{x}$ sur τ est non-triviale, et donc $\bar{x}$ inverse τ d'après le Fait 1.3.5.

Maintenant si y est un autre élément de $N(B) \setminus B$, $\bar{x}$ et $\bar{y}$ inversent tous deux τ, donc sont congrus modulo $C_H(\tau) = H^\circ$, et ainsi x et y sont congrus modulo B. L'ordre de W est donc 2. $\square$

4.1.3 Si $W = 1$

L'honnêteté exige que soit mentionné ce cas sans issue pour le moment. D'une part le 2-sous-groupe de Sylow est connexe, et cela conjugue les involutions de G sans même faire appel au Fait 1.4.5. D'autre part $B = C(i)$ est autonormalisant, et le manque de prise est total. C'est à se demander si un tel groupe ne pourrait pas s'avérer, dans les temps à venir, constructible par un théoricien des modèles ; en tout cas le théoricien des groupes se demande ce qu'il peut faire ici !

Lemme 4.1.8 (cf. Proposition 4.1.7) *Pour $g \notin N(B)$, le quotient $(B \cap B^g) \cdot O(B)/O(B)$ est fini d'ordre uniformément borné.*

Preuve
Soit $H = B/O(B)$, qui est divisible et abélien d'après le Fait 4.1.1. Pour $g \notin N(B)$, soit $T_g = (B \cap B^g) \cdot O(B)/O(B)$. Chaque T_g est sans involution : on obtient sinon un 2-élément commun à B et à B_g, contre la Remarque 4.1.5. Donc $T_g^\circ \leq O(H) = 1$, et les T_g sont uniformément définissables et finis. Par élimination des quanteurs infinis, il existe une borne sur leur ordre. Comme H est abélien divisible, les groupes T_g sont inclus dans un même sous-groupe fini $T_0 \leq H$ indépendant de g. □

Cherlin et Jaligot dans [CJ04] pouvaient poursuivre grâce à l'hypothèse d'ordinarité qui permet via le Fait 1.8.6 de lier $F^\circ(B)$ et $O(B)$. Rien de tel n'étant disponible, nous nous arrêtons ici.

Question 4.1.9 *Existe-t-il un groupe de rang de Morley fini G ayant les propriétés suivantes ?*
- *G est simple connexe minimal de type impair et de rang de Prüfer 1.*
- *Ses involutions sont conjuguées (on note i l'une d'entre elles).*
- *$C(i)$ est un sous-groupe de Borel autonormalisant.*

4.1.4 Si $W = 2$

On suppose désormais que W est non-trivial. D'après la Proposition 4.1.7, $|W| = 2$.

Lemme 4.1.10 *Le 2-sous-groupe de Sylow de G est isomorphe à $\mathbb{Z}_{2^\infty} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, l'action étant par inversion. En particulier, $N(B) = B \rtimes \langle w \rangle$ pour une involution w de $N(B) \setminus B$ qui inverse S°.*

Preuve
Il est clair d'après les hypothèses que $[S : S^\circ] = 2$. On relève la 2-torsion présente dans ce quotient en un élément w, de sorte que $S = S^\circ \cdot \langle w \rangle$ (on ne sait pas encore que w est une involution).
On a $N(B) = B \cdot \langle w \rangle$. Comme dans la preuve de la Proposition 4.1.7, w ne peut pas centraliser S°, et donc w inverse S°. Alors $d(S^\circ) \leq (Z(C(S^\circ)))^{-w}$ est encore abélien et inversé par w.
Le Fait 1.3.6 appliqué avec $H = d(S^\circ) \cdot \langle w \rangle$ prouve que w est une involution. □

Notation 4.1.11 *Soit w une involution comme dans le Lemme 4.1.10.*

Nous pouvons conjuguer les involutions de G “à la main”, sans utiliser le Fait 1.4.5.

Lemme 4.1.12 $\mathcal{I}(G) = i^G$.

Preuve
Pour le moment, il y a au plus deux classes : celle de i et celle de w (la conjugaison des involutions de $S \setminus S^\circ$ est classique). Nous réunissons donc i^G et w^G comme suit.
Si les deux classes sont distinctes, alors i est seule de sa G-classe dans S. Le Fait 1.3.11 impose alors que $C(i)$ est connexe, puis la Remarque 4.1.5 prouve $N(B) = C(i) = C^\circ(i) = B$, une contradiction. □

Noter la parfaite symétrie de la paire (i, w) :

Corollaire 4.1.13 *La configuration est symétrique dans le sens suivant. $C^\circ(w)$ est un sous-groupe de Borel conjugué à B et i-invariant, avec $i \notin C^\circ(w)$.*

Preuve
En effet w est conjuguée à i, donc $C^\circ(w)$ est un sous-groupe de Borel conjugué à B. En outre i normalise $C^\circ(w)$. Maintenant si $i \in C^\circ(w)$, alors par connexité des sous-groupes de Sylow, Fait 1.4.4, on a $i = w$, une contradiction. $\square$

Notation 4.1.14 *On note B_w le sous-groupe de Borel $C^\circ(w)$. (On a bien sûr $B_w \neq B$.)*

Lemme 4.1.15 *Si B est abélien, alors w inverse B.*

Preuve
Supposons en effet B abélien. Si $C_B^\circ(w)$ est infini, soit $x \in C_B^\circ(w)^\#$. Alors $x \in B \cap B^w$ qui sont tous deux abéliens, donc $C^\circ(x) > B$, une contradiction. Ainsi $C_B(w)$ est fini, et d'après le Fait 1.3.3, w inverse B. $\square$

Nous allons désormais montrer la

Proposition 4.1.16 *B est abélien.*

La preuve occupera quelques lemmes et fera évidemment intervenir la notion d'unipotence. Elle est très similaire à celle du Théorème 3.1.10.

Supposons que B ne soit pas abélien. En particulier B n'est pas un bon tore. D'après le Fait 1.8.14, B admet au moins un paramètre d'unipotence distinct de $(\infty, 0)$.

Notation 4.1.17 *Soit $\tilde{p}$ un paramètre d'unipotence* maximal *pour B. On a $\tilde{p} \neq (\infty, 0)$.*

Lemme 4.1.18 *Soit $Y < G$ un sous-groupe définissable, connexe, et $\langle i, w\rangle$-invariant. Si Y admet le paramètre d'unipotence $\tilde{p}$, alors il l'admet pour paramètre d'unipotence* maximal*.*

Preuve
Ce lemme est trivial si $\tilde{p}$ est de la forme (p, ∞), on suppose donc $\tilde{p} = (\infty, d)$ pour un entier d. Soit Y comme dans l'énoncé, de sorte que $U_{\tilde{p}}(Y) \neq 1$. On montre que le paramètre d'unipotence $\tilde{p}$ est maximal pour Y. Supposons en effet $d_\infty(Y) > d$.

Si $U_\infty(Y)$ possède une involution k, alors k est centrale dans $U_\infty(Y)$; donc $U_\infty(Y) \leq C^\circ(k)$ qui est un conjugué de B d'après le Lemme 4.1.12. Ceci contredit la définition de $\tilde{p}$ dans la Notation 4.1.17. Ainsi $U_\infty(Y)$ est sans involution.

Considérons maintenant l'action de i sur $U_\infty(Y)$. D'après le Fait 1.8.21 si $\tilde{p}$ est en caractéristique nulle ou de manière immédiate si la caractéristique en est première, $C^\circ_{U_\infty(Y)}(i)$ est un $(\infty, d_\infty(Y))$-groupe. Par définition de $\tilde{p}$, il vient que i inverse $U_\infty(Y)$.

Le même argument vaut pour w, et encore pour iw, qui d'après le Lemme 4.1.12 sont conjuguées à i. Ceci est absurde. $\square$

Corollaire 4.1.19 *Aucun sous-groupe définissable, connexe, propre et $\langle i, w\rangle$-invariant ne peut contenir à la fois $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ et $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B_w)))$.*

Preuve
Soit en effet Y un sous-groupe comme dans l'énoncé. D'après le Lemme 4.1.18, $\tilde{p}$ est un paramètre d'unipotence maximal pour Y. Maintenant, selon le Lemme 1.8.5 ou le Lemme 1.9.1 selon la nature de $\tilde{p}$, $U_{\tilde{p}}(B)$ est l'unique $\tilde{p}$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{p}}(Y)$. Mais comme Y contient aussi $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B_w)))$, le même argument impose $U_{\tilde{p}}(B) = U_{\tilde{p}}(B_w)$, donc $B = B_w$, une contradiction. $\square$

Notation 4.1.20 *On note $H = (B \cap B_w)^\circ = C^\circ(i, w)$.*

Si $H = 1$, alors w inverse B qui est donc abélien, une contradiction. Ainsi a-t-on $H \neq 1$.

Lemme 4.1.21 *$F^\circ(B)$ est sans involution.*

Preuve
Sinon, il contient un 2-tore S° qui est central dans B. En particulier, $S^\circ \leq C^\circ(H)$. Mais par symétrie, il y a un 2-tore S_w° dans $F^\circ(B_w)$, et donc $S_w^\circ \leq C^\circ(H)$. Ainsi i et w qui commutent sont-elles dans un même sous-groupe définissable connexe. La connexité des sous-groupes de Sylow donnée par le Fait 1.4.4 implique $i = w$, une contradiction. $\square$

Lemme 4.1.22 *H est abélien et sans involution.*

Preuve
Supposons H non-abélien. Alors $Y = C^\circ(H')$ est $\langle i, w\rangle$-invariant et contient $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ ainsi que $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B_w)))$, une contradiction au Corollaire 4.1.19. Ainsi H est abélien.
Si H possède une involution k, alors $k \in C^\circ(i) \cap C^\circ(w)$ et donc $k = i = w$, une contradiction. $\square$

Lemme 4.1.23 *w inverse $U_{\tilde{p}}(B)$ qui est abélien. (De même i inverse $U_{\tilde{p}}(B_w)$.)*

Preuve
$U_{\tilde{p}}(B)$ est sans involution d'après le Lemme 4.1.21. Soit $X = C^\circ_{U_{\tilde{p}}(B)}(w)$, et supposons $X \neq 1$. D'après le Fait 1.8.21 ou de manière évidente selon que $\tilde{p}$ est de caractéristique nulle ou première, X est un $U_{\tilde{p}}$-sous-groupe, qui est commun à B et à B_w. D'après le Fait 1.8.23 (resp. Fait 1.8.1) si $\tilde{p}$ est de caractéristique nulle (resp. première), X est inclus dans $F^\circ(B)$ et dans $F^\circ(B_w)$. Le groupe $Y = C^\circ(X)$ est alors $\langle i, w\rangle$-invariant, et contient à la fois $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B)))$ et $U_{\tilde{p}}(Z(F^\circ(B_w)))$, une contradiction au Corollaire 4.1.19.
Ainsi $X = 1$ et w inverse $U_{\tilde{p}}(B)$ qui est abélien. La symétrie de la configuration implique alors la deuxième affirmation. $\square$

Lemme 4.1.24 *w n'inverse pas $F^\circ(B)$. (De même, i n'inverse pas $F^\circ(B_w)$.)*

Preuve
Sinon $F^\circ(B)$ est inversé par w, et S° aussi par choix de w. D'après le Lemme 1.3.1, il vient $[F^\circ(B), S^\circ] = 1$, et donc $F^\circ(B) \cdot S^\circ$ est nilpotent. Cela prouve $S^\circ \leq F^\circ(B)$, une contradiction au Lemme 4.1.21. $\square$

Lemme 4.1.25 *$C^\circ_B(H) = H$.*

Preuve
L'inclusion $H \leq C^\circ_B(H)$ est évidente, car H est abélien d'après le Lemme 4.1.22. Nous prouvons l'autre. Soit $X = C_{F^\circ(B_w)}(i) \leq H$. D'après le Lemme 4.1.24, $X \neq 1$. On forme $Y = C^\circ(X)$ qui contient $U_{\tilde{p}}(B_w)$ et qui est $\langle i, w\rangle$-invariant. D'après le Lemme 4.1.18, $\tilde{p}$ est alors un paramètre d'unipotence maximal pour Y. Maintenant le Lemme 1.8.5 ou 1.9.1 selon la nature de $\tilde{p}$ implique que $U_{\tilde{p}}(B_w) = U_{\tilde{p}}(Y)$. En particulier, $Y \leq N^\circ(U_{\tilde{p}}(B_w)) = B_w$. Par conséquent $C^\circ_B(H) \leq (B \cap Y)^\circ \leq H$. $\square$

Notation 4.1.26 *Soit $N = N^\circ_B(H)$.*

Lemme 4.1.27 *N n'a pas d'involutions.*

Preuve
Sinon on a un 2-tore non-trivial $S_1^\circ \leq N$, et d'après le Lemme 2.1.1 on peut supposer que w normalise S_1°. Comme $w \notin S_1^\circ$, on a d'après la structure du 2-sous-groupe de Sylow du Lemme 4.1.10 que w inverse S_1°.
D'autre part w centralise H par définition de ce dernier. Comme S_1° normalise H, le Lemme 1.3.1 implique $[H, S_1^\circ] = 1$, donc $S_1^\circ \leq H$ d'après le Lemme 4.1.25. Ceci contredit le Lemme 4.1.22. $\square$

Preuve de la Proposition 4.1.16

N étant sans involution, d'après le Fait 1.3.2 on a une décomposition $N = C_N(w) \cdot N^{-w}$, et chacun des deux facteurs est de degré 1. Soit $n \in N^{-w}$. Alors w inverse $d(n)$ qui n'a pas d'involution, et qui normalise H, lequel est inversé par w. Le Lemme 1.3.1 implique $[d(n), H] = 1$, donc $d(n) \leq C(H)$. Ainsi $N^{-w} \subseteq C(H)$.

D'autre part $C_N(w) = C_N^\circ(w) \leq H \leq C(H)$, et donc $N \leq C(H)$. Enfin $N \leq C_B^\circ(H) = H$ d'après le Lemme 4.1.25.

H est donc un sous-groupe de Carter de B, et il contient un 2-tore d'après le Corollaire 1.5.3. Ceci est une contradiction au Lemme 4.1.22 qui achève la preuve de la Proposition 4.1.16. □

Remarque 4.1.28 *L'abélianité de B ainsi établie, il est possible que ce soit un bon tore !*

N'oubliant pas le Lemme 4.1.15, on a :

Corollaire 4.1.29 $N(B) = B \rtimes \langle w \rangle$ *où l'action de w sur B est par inversion.*

Proposition 4.1.30 *Soient deux involutions i et j en position générique. Il existe alors une (unique) involution k telle que i et j normalisent le sous-groupe de Borel $C^\circ(k)$. Les involutions i et j sont dans le même coset strict de $C^\circ(k)$ (et en particulier leur produit est dans un unique conjugué de B), et elles sont $C^\circ(k)$-conjuguées.*

Preuve

Les involutions de G sont toutes conjuguées d'après le Lemme 4.1.12. Si pour i et j en position générique, la clôture définissable $d(ij)$ est sans involution, alors la preuve du Fait 1.3.11 (pour laquelle nous renvoyons à [BBC06]) impose que $C(i)$ est connexe, une contradiction à l'hypothèse de cette sous-section.

Pour i et j en position générique, il existe donc une involution k dans $d(ij)$. Comme k est encore conjuguée à i et à j, $C^\circ(k)$ est un sous-groupe de Borel dont k est l'unique involution. Ainsi $i, j \in C(k) \setminus C^\circ(k)$. L'unicité de k pour ces propriétés est évidente.

Enfin $C(k)$ conjugue ses 2-sous-groupes de Sylow, qui sont de la forme $\tau \rtimes \langle w \rangle$, où toutes les involutions hors de τ sont τ-conjuguées. Cela prouve qu'il y a dans $C(k)$ deux classes d'involutions : k et toutes les autres, qui sont $C^\circ(k)$-conjuguées entre elles. □

Corollaire 4.1.31 $\mathrm{rg}(G) = 3\,\mathrm{rg}(C(i))$.

Preuve

On considère l'application f qui à deux involutions i et j en position générique associe l'unique involution k comme dans la Proposition 4.1.30. Soit (i_0, j_0) une paire générique fixée. Alors d'après la Proposition 4.1.30, les paires (i_1, j_1) ayant même image k_0 que (i_0, j_0) par f sont exactement les paires d'involutions distinctes de $I(C(k_0)) \setminus \{k_0\}$.

Les fibres de f sont donc de rang égal à $2\,\mathrm{rg}(C(i))$. Or il est clair que l'image de f est $I(G)$. On a donc $2(\mathrm{rg}(G) - \mathrm{rg}(C(i))) - 2\,\mathrm{rg}(C(i)) = \mathrm{rg}(G) - \mathrm{rg}(C(i))$, et il vient $\mathrm{rg}(G) = 3\,\mathrm{rg}(C(i))$. □

Corollaire 4.1.32 *Pour chaque g de G, $I(G)gI(G)$ est générique dans G.*

Preuve

Considérons l'application qui à deux involutions en position générique associe leur produit. Une paire générique (i_0, j_0) étant fixée, les paires (i_1, j_1) ayant même produit que (i_0, j_0) sont à chercher dans $I(C(k_0))$, où k_0 est l'unique involution de $d(i_0 j_0)$; en outre à i_1 fixée, j_1 est déterminée. La fibre au-dessus de $i_0 j_0$ est donc (incluse dans un ensemble uniformément définissable) de rang au plus $\mathrm{rg}(C(i))$, et l'image de notre application est de rang au moins

$$2(\mathrm{rg}(G) - \mathrm{rg}(C(i)) - \mathrm{rg}(C(i)) = 2\,\mathrm{rg}(G) - 3\,\mathrm{rg}(C(i)) = \mathrm{rg}(G).$$

Ainsi $I(G) \cdot I(G)$ est générique dans G. Maintenant $I(G)gI(G) = gI(G)^g I(G) = gI(G) \cdot I(G)$ est également générique. □

Nous disons quelques mots de la géométrie des sous-groupes de Borel.

Lemme 4.1.33 *Soit $H \neq 1$ un sous-groupe définissable de B. Alors $N^\circ(H) = B$. En particulier, pour tout x de $B^\#$, on a $B = C^\circ(x)$.*

Corollaire 4.1.34 $B \cap B^g = 1$ *si* $g \notin N(B)$.

Preuve
En effet si $x \in (B \cap B^g)^\#$, alors $B = C^\circ(x) = B^g$. □

Enfin la proposition suivante utilise le Fait 1.5.5 qui n'a pas encore été publié.

Proposition 4.1.35 *Il existe un sous-groupe de Borel non-généreux.*

Preuve
Un sous-groupe de Borel généreux contient un sous-groupe de Carter de G. En effet si B_0 est un sous-groupe de Borel généreux et Q un sous-groupe de Carter de B_0, alors Q est généreux dans B_0 donc d'après le Fait 1.2.4, Q est généreux dans G, donc quasi-autonormalisant. En particulier, c'est un sous-groupe de Carter de G.

D'après le Fait 1.5.5, les sous-groupes de Carter de G sont conjugués à B qui est lui-même un sous-groupe de Borel. En particulier, tous les sous-groupes de Borel généreux sont conjuguées à B.

Si tous les sous-groupes de Borel sont généreux, alors tous les sous-groupes de Borel de G sont abéliens ; dans ce cas G est un mauvais groupe, donc de type dégénéré, une contradiction. □

La configuration que nous avons décrite peut évoquer un mauvais groupe, à cette différence remarquable qu'elle a des involutions. On n'a pas su montrer que le sous-groupe de Borel B, qui est certes disjoint, recouvrait le groupe ambiant G (qu'il le recouvre génériquement est trivial). Faute de disposer d'une version générique du théorème de Bachmann, on doit malheureusement s'arrêter ici.

Question 4.1.36 *Existe-t-il un groupe de rang de Morley fini G ayant les propriétés suivantes ?*
– *G est simple connexe minimal de type impair et de rang de Prüfer* 1.
– *Ses involutions sont conjuguées (on note i l'une d'entre elles).*
– *$C^\circ(i)$ est un sous-groupe de Borel abélien, disjoint de ses conjugués.*
– *Il existe une involution w telle que $N(C^\circ(i)) = C^\circ(i) \rtimes \langle w \rangle$, l'action étant par inversion.*
– $\mathrm{rg}(G) = 3\,\mathrm{rg}(C(i))$.

4.2 Cotorico !

L'objectif de cette section est de préparer l'étude des involutions dans un groupe simple connexe minimal de rang de Prüfer 2. Notre résultat principal, en tout cas celui qui sera très utile dans le chapitre 5, est le suivant. Nous définirons plus bas une propriété de *cotoricité* plus générale ; la proposition ci-après signifie simplement que tout groupe G de rang de Morley fini simple connexe minimal, de type impair et de rang de Prüfer 2, a la cotoricité.

Proposition 4.2.1 *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal, de type impair et de rang de Prüfer* 2*. Alors deux involutions qui commutent sont dans un même* 2*-tore.*

Il serait dommage de s'en tenir là. On avancera donc dans la direction d'une conjecture de caractérisation de PSL_2 parmi les groupes connexes de type impair : celui qui provoque les contre-exemples à la cotoricité (au sens de la propriété définie plus bas).

Conjecture 4.2.2 *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini de type impair. Si G est un contre-exemple à la cotoricité, alors G interprète* PSL_2.

Nous privilégions ici les involutions non pas par respect de la ligne de classification, mais faute de mieux. Un énoncé plus général de cotoricité aurait pu être :

Soit G un groupe simple de rang de Morley fini, et T un sous-groupe de Carter de G. Si $x, y \in T^G$ avec $[x, y] = 1$, alors $\exists g \in G$ tel que $x, y \in T^g$, à moins que le groupe ambiant G n'ait une raison valable.

La Conjecture 4.2.2 explicite une "raison valable". Quoi qu'il en soit, nous sommes très loin de disposer de techniques pour traiter ce cas général de x et y quelconques. Il y a pire : malgré la conjugaison des p-sous-groupes de Sylow dans un groupe de rang de Morley fini sans p-unipotence (Fait 1.4.6), on ne sait rien dire si x et y sont d'ordre fini premier $p > 2$! En effet la preuve du Lemme 4.2.6 requiert le contrôle des automorphismes d'un 2-tore, c'est-à-dire une propriété spécifique au nombre premier pair.

Définition 4.2.3 *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini de type impair. Deux involutions i et j qui commutent sont* cotoriques *si elles appartiennent à un même 2-tore (i.e., s'il existe un 2-sous-groupe de Sylow S de G tel que $i, j \in S^\circ$), ce que l'on note $i \sim j$.*

Soit, pour un groupe connexe de rang de Morley fini de type impair, la propriété

Cotoricité : deux involutions qui commutent sont cotoriques.

Lemme 4.2.4 *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini de type impair, i et j deux involutions qui commutent. Alors*

$$i \sim j \Leftrightarrow i \in C^\circ(j) \Leftrightarrow j \in C^\circ(i).$$

Preuve

Si i et j sont cotoriques, il existe un 2-tore τ de G qui les contient toutes deux. Dans ce cas $i \in \tau \leq C^\circ(j)$, et un sens est prouvé. On prouve la réciproque par induction.

Supposons $j \in Z(G)$. Par toricité (Fait 1.4.5), il existe un 2-tore τ_i de G contenant i, que l'on peut supposer maximal. Mais toujours par toricité, j se trouve dans tout 2-tore maximal de $C^\circ(j) = G$, donc $j \in \tau_i$ et les involutions sont cotoriques.

Reste le cas où $C^\circ(j) < G$. Par hypothèse $i \in C^\circ(j)$, et par toricité $j \in C^\circ(j)$, donc l'hypothèse d'induction dans $C^\circ(j)$ y prouve la cotoricité des involutions, qui sont encore cotoriques dans G.

$\square$

Lemme 4.2.5 *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini de type impair. Si $G/Z(G)$ a la cotoricité, alors G a la cotoricité.*

Preuve

Soient i et j deux involutions de G qui commutent. D'après le Lemme 4.2.4, elles seront évidemment cotoriques si l'une ou l'autre est dans le centre. On suppose alors que les deux involutions $\bar{i}$ et $\bar{j}$ sont (égales ou) cotoriques dans $\bar{G} = G/Z(G)$. Il existe un 2-sous-groupe de Sylow S de G tel que $\bar{i}, \bar{j} \in \overline{S^\circ} = \bar{S}^\circ = S^\circ \cdot Z(G)/Z(G)$. Notamment $i, j \in S^\circ \cdot Z(G) \leq C(S^\circ)$, et d'après le Fait 1.3.12, il vient $i, j \in S^\circ$. $\square$

4.2.1 Réduction d'un contre-exemple minimal

Lemme 4.2.6 *Soit G un contre-exemple minimal à la cotoricité. Si le rang de Prüfer de G est au moins 2, alors il y a une involution dans $Z(G)$.*

Preuve

Supposons au contraire que le contre-exemple G soit de rang de Prüfer ≥ 2 et sans involution centrale. Notons que par toricité, si $w \in I(G)$ alors $C^\circ(w)$ a même rang de Prüfer que G. Par minimalité de G, $C^\circ(w)$ satisfait donc la cotoricité.

Soient i et j deux involutions commutant mais non cotoriques. L'involution j normalise $C^\circ(i)$ et commute avec i, donc d'après le Lemme 2.1.1 j normalise un 2-tore maximal τ_i contenant i. Si j centralise un sous-tore non-trivial τ_0 de τ_i, soit $k \in I(\tau_0)$. Alors $j \sim k$, mais aussi $i \sim k$. Comme k n'est pas centrale, on a $i, j \in C^\circ(k) < G$, donc par minimalité de G, $i \sim j$, une contradiction.

Ainsi le centralisateur de j dans τ_i est fini. D'après le Fait 1.3.4, j inverse τ_i. Notamment j centralise $\langle I(\tau_i)\rangle$ (c'est un 2-groupe abélien élémentaire), et $\langle I(\tau_i)\rangle$ normalise $C^\circ(j)$. Toujours d'après le Lemme 2.1.1, $\langle I(\tau_i)\rangle$ normalise un 2-tore maximal τ_j de $C^\circ(j)$ tel que $j \in \tau_j$. Comme $\langle I(\tau_i)\rangle$ contient au moins 3 involutions, l'une d'entre elles, disons k, n'inverse pas τ_j. En particulier $C^\circ_{\tau_j}(k) \neq 1$. Soit donc $\ell \in I(C^\circ_{\tau_j}(k))$. On a $k \sim \ell$ et $\ell \sim j$. Ainsi $k, j \in C^\circ(\ell) < G$ et commutent, donc par minimalité $j \sim k$. D'autre part il est clair que $i \sim k$. Ainsi $i, j \in C^\circ(k) < G$, donc par minimalité $i \sim j$, une contradiction. □

Preuve de la Proposition 4.2.1

Soit G un groupe simple connexe minimal de type impair et de rang de Prüfer 2. On suppose qu'il n'a pas la cotoricité. Comme toutes les sections définissables connexes propres de G sont résolubles, d'après le Fait 1.4.4 elles satisfont la cotoricité. G est ainsi un contre-exemple minimal, et le Lemme 4.2.6 implique $Z(G) \neq 1$, une contradiction. □

Notation 4.2.7 *Soit G_1 un contre-exemple à la cotoricité minimal* au sens des sections connexes définissables.

Lemme 4.2.8 *$G_1/Z(G_1)$ est un contre-exemple minimal à la cotoricité et n'a pas de centre.*

Preuve

D'après le Lemme 4.2.5, $G_1/Z(G_1)$ n'a pas la cotoricité. Par minimalité de G_1, cela impose que $Z(G_1)$ est fini, et que $G_1/Z(G_1)$ est encore minimal en tant que contre-exemple à la cotoricité. Le Fait 1.7.2 implique l'absence de centre. □

Corollaire 4.2.9 *$G_1/Z(G_1)$ est de rang de Prüfer exactement* 1.

Preuve

Il y a dans G_1 au moins une involution non centrale, sinon le Fait 1.4.5 en l'absence de 2-unipotence prouve la cotoricité. Ainsi $G_1/Z(G_1)$ connexe a-t-il au moins une involution. D'après le Fait 1.3.13, $G_1/Z(G_1)$ est de type impair, c'est-à-dire de rang de Prüfer au moins 1.

D'autre part, d'après le Lemme 4.2.8, $G_1/Z(G_1)$ est un contre-exemple minimal à la cotoricité, mais sans centre. Le Lemme 4.2.6 appliqué à $G_1/Z(G_1)$ prouve que son rang de Prüfer est exactement 1. □

4.2.2 Apparition d'une section simple

L'étude de la cotoricité proprement dite était faite dans le Lemme 4.2.6. On se penche à présent sur *ce qui cause les contre-exemples.*

Lemme 4.2.10 *Le* 2*-sous-groupe de Sylow d'un groupe connexe de rang de Morley fini, type impair et rang de Prüfer* 1 *est d'indice au plus* 2.

Preuve

Soit S le sous-groupe de Sylow en question. Chaque élément de S agit sur S° dont le groupe d'automorphismes est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$. En particulier chaque élément de S centralise ou inverse S°. Maintenant d'après le Fait 1.3.12, chaque élément de $S \setminus S^\circ$ inverse S°. Tout produit d'éléments de $S \setminus S^\circ$ est donc dans S° ; ceci prouve qu'il y a au plus un coset $aS^\circ \neq S^\circ$ dans S. □

Lemme 4.2.11 *Un groupe connexe de rang de Morley fini de type impair ou dégénéré dont toutes les sections simples infinies ont un* 2*-sous-groupe de Sylow connexe, a un* 2*-sous-groupe de Sylow connexe.*

Preuve

Soit H un tel groupe. On suppose que H possède un sous-groupe propre définissable infini normal $N \lhd H$. Alors comme H/N et N vérifient la même hypothèse, par induction leur 2-sous-groupe de Sylow est connexe. Relevant, celui de H est également connexe.

On suppose donc que H ne possède pas de sous-groupe propre définissable et normal qui soit infini. En particulier $H/Z(H)$ est un groupe simple. Par hypothèse, son 2-sous-groupe de Sylow est connexe. Maintenant tout 2-sous-groupe de Sylow S de H est de la forme $S^\circ \cdot (S \cap Z(H))$, et donc abélien. En particulier $S \leq C_S(S^\circ) = S^\circ$ d'après le Fait 1.3.13 si H est de type dégénéré, ou d'après le Fait 1.3.12 si H est de type impair. □

Notation 4.2.12 *Soit* $G_0 = G_1/Z(G_1)$ *(où* G_1 *est comme, dans le Notation 4.2.7, un contre-exemple à la cotoricité minimal* au sens des sections définissables connexes*).*

D'après le Corollaire 4.2.9, G_0 est de rang de Prüfer 1.

Lemme 4.2.13 *Le* 2*-sous-groupe de Sylow de* G_0 *est de la forme* $\mathbb{Z}_{2^\infty} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*, l'action étant par inversion.*

Preuve
G_0 est de rang de Prüfer 1 et contient deux involutions i et j qui commutent sans être cotoriques d'après le Lemme 4.2.5. Notamment le sous-groupe de Sylow de G_0 n'est pas connexe. Le Lemme 4.2.10 permet alors d'écrire $S = S^\circ \cdot \langle j \rangle = S^\circ \rtimes \langle j \rangle$, et l'action est nécessairement par inversion d'après le Fait 1.3.12. □

Corollaire 4.2.14 G_0 *possède une section définissable simple de rang de Prüfer* 1 *dont le* 2*-sous-groupe de Sylow est encore de la forme* $\mathbb{Z}_{2^\infty} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *(l'action étant par inversion).*

Preuve
On suppose qu'aucune section définissable simple de G_0 ne contient un 2-sous-groupe de Sylow "plein". Comme les groupes connexes dégénérés sont sans involution, chaque section définissable simple de G_0 a pour 2-sous-groupe de Sylow 1 ou $\mathbb{Z}_{2^\infty}$. En particulier chaque section définissable simple a un sous-groupe de Sylow connexe. D'après le Lemme 4.2.11, le 2-sous-groupe de Sylow de G_0 est connexe, une contradiction. □

Nous devons nous arrêter ici dans l'étude de la cotoricité. Le chemin semble encore bien long vers la Conjecture 4.2.2, car rien ne nous a permis de faire apparaître une section simple connexe minimale. Il faudrait en outre savoir supprimer le cas "centralisateur connexe de i un Borel, $W = 2$", exposé dans la sous-section 4.1.4 de ce chapitre !

4.2.3 Coborélianité

G est ici simple connexe minimal, de type impair, et de rang de Prüfer 2.

La toricité d'une involution équivaut à son appartenance à un sous-groupe de Borel. L'énoncé naturel à formuler avec des tores est la cotoricité d'involutions qui commutent ; et d'après la Proposition 4.2.1, cette propriété est satisfaite si le rang de Prüfer est au moins 2. Comme dans le cas d'une seule involution, deux involutions *qui commutent* sont cotoriques si et seulement si elles appartiennent à un même sous-groupe de Borel.

On peut être tenté de généraliser, mutatis mutandis, la cotoricité au cas d'involutions ne commutant plus ; la *coborélianité* est l'énoncé naturel.

Conjecture 4.2.15 (Coborélianité) *Soit* G *un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal de type impair et de rang de Prüfer* 2*. Si* i *et* j *sont deux involutions de* G*, alors il existe un sous-groupe de Borel* B *tel que* $i, j \in B$*.*

Définition 4.2.16 *La* distance *entre deux involutions est la longueur minimale d'un chemin les reliant sur le graphe des involutions qui commutent deux-à-deux (d'après la Proposition 4.2.1, ceci coïncide avec le graphe de cotoricité).*

Lemme 4.2.17 *Deux involutions non-conjuguées sont à distance au plus* 2*.*

Preuve
Si i et j sont deux involutions non-conjuguées dans G, elles ne sont pas non plus conjuguées sous $d(ij)$. L'impossibilité de choisir une racine carrée de ij dans $d(ij)$ provient d'une involution $k \in d(ij)$. Par cotoricité, on a $i \sim k \sim j$. □

Proposition 4.2.18 *Soit* G *un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal, de type impair et rang de Prüfer au moins* 2*. Alors le graphe de cotoricité est connexe.*

Preuve (suggérée par A. Borovik)

D'après le Lemme 4.2.17, la connexité du graphe est immédiate s'il y a au moins deux classes de conjugaison. On suppose donc $I(G) = i^G$. Soit X_i la composante connexe contenant i (cet ensemble n'est pas a priori définissable). On suppose $X_i \subsetneq I(G)$.

G agit transitivement sur $I(G)$. Un élément qui envoie i sur une $k \notin X_i$ ne normalise pas X_i. Ainsi $N(X_i)$ est un sous-groupe *strict* de G (a priori non-définissable). Soit $H = \langle C^\circ(j), j \in X_i \rangle$. Ce groupe est définissable, connexe, et inclus dans $N(X_i)$. En outre $N(X_i) \leq N(H)$.

On prouve que $I(H) \subseteq X_i$. Soit $k \in I(H)$. La conclusion est évidente d'après le Lemme 4.2.17 si k n'est pas H-conjuguée à i. On suppose donc $k = i^h$. Mais $H \leq N(X_i)$, donc ici encore $k \in X_i$. Ainsi $I(H) \subseteq X_i$.

Le groupe $M = N(H)$ possède des involutions, et même des 2-tores maximaux de G. Soit k une involution de M. D'après le Lemme 2.1.1, k normalise un 2-tore maximal τ de H. Soit $\ell \in \tau$ telle que $[k, \ell] = 1$; on a alors par cotoricité dans G (voir Proposition 4.2.1 et Lemme 4.2.4) que $\tau \cdot \langle k \rangle \leq C^\circ(\ell)$. D'après le Fait 1.4.4 et la maximalité du 2-tore τ, il vient $k \in \tau \leq H$. Ainsi avons-nous $I(H) = I(M)$. Notamment si $k \in I(M \cap M^g)$, alors $k \in X_i \cap X_i^g \neq \emptyset$, et donc $g \in N(X_i) \leq N(H) = M$.

Le groupe M est ainsi fortement inclus, et d'après le Fait 1.1.2 le rang de Prüfer est 1, une contradiction. $\square$

Conjecture 4.2.19 (distance ≤ 2) *Soit G simple connexe minimal de Prüfer 2. Alors toutes les involutions sont à distance au plus 2 sur le graphe de cotoricité.*

Lemme 4.2.20 *Deux involutions à distance au plus 2 sont coboréliennes.*

Preuve

Si $i \sim k \sim j$, alors par cotoricité, $i, j \in C^\circ(k)$ qui est inclus dans un sous-groupe de Borel. $\square$

Se demander réciproquement si deux involutions coboréliennes sont à distance au plus 2, c'est s'engager à classifier les sous-groupes de Borel. Un tel projet est hors d'ambition.

4.3 Retour aux échelles

L'analyse qui précède permet de revenir en la généralisant sur la propriété d'extension présentée dans la section 2.2 du chapitre 2.

4.3.1 Rappels

Soient G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal et K un sous-groupe de G. Pour un sous-groupe $1 < T < G$ définissable connexe K-invariant, on s'intéresse à la propriété

K**-échelle** : T peut être inclus dans un sous-groupe de Borel K-invariant.

Lemme 2.2.4 *On peut supposer que K est un groupe de type fini engendré par des p-éléments, et d'exposant borné sur T.*

Corollaire 2.2.12 *Un contre-exemple* maximal *à la K-échelle est un sous-groupe de Carter abélien de G. En outre si T_0 est un contre-exemple (non nécessairement maximal) à la K-échelle, alors $N^\circ(T_0)$ est un contre-exemple maximal.*

4.3.2 Etude de la torsion de T

Lemme 4.3.1 *On suppose que G possède un q-tore non-trivial. Soit T un contre-exemple maximal à la K-échelle. Alors pour chaque nombre premier p, T contient un p-tore P maximal dans G ; si $P \neq 1$ on a $T = C^\circ(P)$.*

Preuve

Chaque p-tore maximal est inclus dans un sous-groupe de Carter de G d'après le Fait 1.5.1. Ces derniers sont tous conjugués à T d'après le Fait 1.5.5. La relation $T = C^\circ(P)$ vient de la maximalité de T. □

Pour ceux que rebute l'emploi d'un résultat impublié, énonçons une variante un peu plus faible.

Lemme 4.3.2 *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini. Alors tout p-tore centralise un q-tore maximal.*

Preuve

C'est évident par conjugaison des tores décents maximaux, Fait 1.2.7. □

Lemme 4.3.1' *Soit T un contre-exemple maximal à la K-échelle. On suppose que T possède un q-tore non-trivial. Alors pour chaque nombre premier p, T contient un p-tore P maximal dans G ; si $P \neq 1$ on a $T = C^\circ(P)$.*

Preuve

Soit Q le q-sous-groupe de Sylow de T ; Q est caractéristique dans T. En particulier $T = C^\circ(Q)$ par maximalité. D'après le Lemme 4.3.2, il existe un p-tore maximal de G dans $C^\circ(Q) = T$. □

4.3.3 Avec des involutions

Nous pouvons enfin généraliser le Corollaire 3.0.2, grâce à une application de la conjugaison des sous-groupes de Carter.

Remarquer que le lemme suivant généralise le Lemme 4.3.2.

Lemme 4.3.3 *Soit G un groupe simple connexe minimal de rang de Morley fini. Alors tout sous-groupe de Carter d'un sous-groupe de Borel généreux est un sous-groupe de Carter de G. En outre tout sous-groupe de Carter de G contient un p-tore maximal de G pour chaque p.*

Preuve

Soient B un sous-groupe de Borel généreux et Q un sous-groupe de Carter de B. Il est clair que Q est généreux dans B. Comme B est généreux dans G, Q est généreux dans G d'après le Fait 1.2.4 ; un simple calcul de rang prouve que Q est quasi-autonormalisant dans G. Q est donc un sous-groupe de Carter de G.

Maintenant tout p-tore maximal de G est inclus dans un sous-groupe de Carter de G d'après le Fait 1.5.1 ; la conjugaison des sous-groupes de Carter, Fait 1.5.5, implique que tout sous-groupe de Carter de G contient un p-tore maximal. □

Théorème 4.3.4 *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal de type impair. Alors*

- *soit pour tout sous-groupe K engendré par des involutions, vaut la K-échelle,*
- *soit $G \simeq \mathrm{PSL}_2$.*

Preuve

Soit T un contre-exemple maximal dans G supposé non-isomorphe à PSL_2. D'après le Corollaire 2.2.12, T est un sous-groupe de Carter abélien de G et donc il contient d'après le Fait 4.3.3 un 2-tore maximal τ. On sépare en deux cas.

Dans le premier cas, le rang de Prüfer est 1. PSL_2 étant exclu, d'après le Théorème 3.0.1 le centralisateur connexe de toute involution est un sous-groupe de Borel. Les involutions de K centralisent l'unique involution $\ell \in \tau \leq T$, donc K normalise $C^\circ(\ell)$ qui est un sous-groupe de Borel contenant T, une contradiction.

Dans le second cas, le rang de Prüfer est au moins 2. Soit k une involution de K. Soit $\ell \in \tau$ telle que $[k, \ell] = 1$; on a alors par cotoricité dans G (voir Proposition 4.2.1 et Lemme 4.2.4) que $\tau \cdot \langle k \rangle \leq C^\circ(\ell)$. D'après le Fait 1.4.4 et la maximalité du 2-tore τ, il vient $k \in \tau \leq T$. On a donc $K \leq T$. Tout sous-groupe de Borel contenant T convient, encore une contradiction. □

Ce théorème d'extension permet, modulo l'hypothèse de générosité de tous les sous-groupes de Borel (ce dont il ne faut pas désespérer), d'apporter une réponse positive à la Conjecture 4.2.15.

Corollaire 4.3.5 *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal de type impair et de rang de Prüfer* 2. On suppose que tous les sous-groupes de Borel sont généreux. *Si i et j sont deux involutions de G, alors il existe un sous-groupe de Borel B tel que i, $j \in B$.*

Preuve

D'après le Fait 1.2.8, $T = C^\circ(ij)$ est infini. On part ainsi d'un sous-groupe T non-trivial, définissable, connexe, et $\langle i, j\rangle$-invariant. D'après le Théorème 4.3.4, T est inclus dans un sous-groupe de Borel B encore $\langle i, j\rangle$-invariant.

Soit Q un sous-groupe de Carter de B, que l'on suppose i-invariant grâce au Corollaire 2.1.5. D'après le Lemme 4.3.3, Q contient un 2-tore maximal τ. Comme dans la preuve du Corollaire 4.3.4, il vient $i \in \tau \leq Q \leq B$, et l'on prouve $j \in B$ de même. □

Chapitre 5

En rang de Prüfer 2

Soit G un groupe simple connexe minimal de type impair et rang de Prüfer 2. Un tel objet n'est pas censé exister ; dans [CJ04], malgré l'absence supposée de mauvais corps, son inconsistance n'a pas été prouvée. Nous tentons sans l'ordinarité de rejoindre Cherlin et Jaligot dans leur étude.

Théorème 5.0.1 *Soit G un groupe simple connexe minimal de type impair et rang de Prüfer 2. Soit S un 2-sous-groupe de Sylow de G. Alors $I(S) = I(S^\circ)$ et les involutions de G sont conjuguées. Le centralisateur connexe de chacune est un sous-groupe de Borel. En outre $C^\circ(S^\circ) = C^\circ(I(S^\circ))$ est un sous-groupe de Carter abélien de G, égal à la composante connexe de chacune des trois intersections deux-à-deux de ces sous-groupes de Borel.*

La présence d'un Viergruppe aggrandit l'éventail des méthodes par la remarquable propriété suivante, parfois appelée "bi-génération".

Fait 5.0.2 (Tiré de [Bor95, Theorem 5.14]) *Soit H un groupe de rang de Morley fini connexe résoluble de type impair. On suppose qu'il existe un Viergruppe V agissant définissablement sur H. Alors $H = \langle C^\circ_H(i), i \in V^\# \rangle$.*

5.1 Prélude aux involutions

Nous espérons que cette section consacrée au jeu des involutions donnera idée de la puissance de la cotoricité (rappelons qu'elle s'applique dans ce chapitre).

Proposition 4.2.1 (Cotoricité) *Soit G un groupe de rang de Morley fini simple connexe minimal, de type impair et de rang de Prüfer 2. Alors deux involutions qui commutent appartiennent à un même 2-tore.*

Notation 5.1.1 *Soient S un 2-sous-groupe de Sylow de G et $V = \langle I(S^\circ)\rangle = \{1, i_1, i_2, i_3\}$.*

Corollaire 5.1.2 *$I(S) = V^\#$ et $I(G) = (V^\#)^G$.*

Preuve
Soit w une involution de S. Alors w centralise l'une des trois involutions de V, disons i. Il vient par cotoricité (Proposition 4.2.1) $w \in C^\circ(i)$. En particulier, $S^\circ \cdot \langle w\rangle$ est un 2-sous-groupe de $C^\circ(i)$, et le Fait 1.4.4 implique $w \in S^\circ$. □

Lemme 5.1.3 *$\langle C^\circ(i), i \in V^\#\rangle = G$.*

Preuve
Supposons $\langle C^\circ(i), i \in V^\#\rangle < G$, et fixons un sous-groupe de Borel $B_0 \geq \langle C^\circ(i), i \in V^\#\rangle$. Si B est un sous-groupe de Borel V-invariant, alors d'après le Fait 5.0.2 $B = \langle C^\circ_B(i), i \in V^\#\rangle \leq B_0$. Ainsi B_0 est unique parmi les sous-groupes de Borel V-invariants.

Soit $M_0 = N(B_0)$. Nous montrons que ce groupe est fortement inclus. Soit en effet $g \notin M_0$ et supposons qu'il existe une involution k dans $M_0 \cap M_0^g$. Alors d'après le Corollaire 5.1.2, $k \in B_0 \cap B_0^g$.

B_0 conjugue k à une involution de V, donc par définition de B_0 il vient $C^\circ(k) \leq B_0$ et $C^\circ(k) \leq B_0^g$ de même. Or $C^\circ(k)$ contient un B_0-conjugué V_1 de V, et ainsi $V_1 \leq B_0 \cap B_0^g$. Comme B_0 est le seul sous-groupe de Borel V-invariant, c'est aussi le seul sous-groupe de Borel V_1-invariant. Ainsi $B_0^g = B_0$, une contradiction à la définition de g.

Le groupe M_0 est donc fortement inclus, et d'après le Fait 1.1.2, le rang de Prüfer de G est 1, une contradiction. □

Notation 5.1.4 *Soit $Q \geq S^\circ$ un sous-groupe de Carter de G (existence assurée par le Fait 1.5.1).*

Corollaire 5.1.5 *Q est abélien.*

Preuve

S'il existe un unique sous-groupe de Borel B_0 contenant Q, alors B_0 est à plus forte raison l'unique sous-groupe de Borel contenant chaque $C^\circ(i) \geq Q$ pour $i \in V^\#$. Il vient en particulier $\langle C^\circ(i), i \in V^\# \rangle \leq B_0$, une contradiction au Lemme 5.1.3. Donc le sous-groupe connexe et nilpotent Q est inclus dans au moins deux sous-groupes de Borel distincts, et le Corollaire 1.8.34 implique son abélianité. □

Corollaire 5.1.6 *Si les trois involutions de V ne sont pas G-conjuguées, alors Q est autonormalisant dans G.*

Preuve

On suppose que $i \in V$ n'est conjuguée à aucune des deux autres. Par cotoricité, on a $i^G \cap S = \{i\}$. D'après le "Théorème Z^*", Fait 1.3.11, $C(i)$ est connexe. Maintenant i est $N_G(Q)$-invariante, donc $N_G(Q) \leq N_{C(i)}(Q) = N_{C^\circ(i)}(Q) = Q$ d'après le Fait 1.5.2. □

Corollaire 5.1.7 *Il y a une ou trois classes de conjugaison d'involutions, mais pas deux.*

Preuve

Supposons au contraire $i_1^G = i_2^G \neq i_3^G$. D'après le Fait 1.3.8, il existe $g \in N(S^\circ)$ tel que $i_2 = i_1^g$. Maintenant un argument de Frattini implique $N(S^\circ) = N^\circ(S^\circ) \cdot N_{N(S^\circ)}(Q) = N^\circ(S^\circ)$ d'après le Corollaire 5.1.6. Donc $g \in N^\circ(S^\circ) = C^\circ(S^\circ) \leq C^\circ(V)$, contradiction. □

Corollaire 5.1.8 *S'il y a trois classes d'involutions, alors $C(V)$ est connexe.*

Preuve

Un argument de Frattini et le Corollaire 5.1.6 donnent alors $C(V) = C^\circ(V) \cdot N_{C(V)}(Q) = C^\circ(V)$. □

Corollaire 5.1.9 *S'il y a trois classes d'involutions, alors pour tout sous-groupe $K \leq G$, tout sous-groupe définissable connexe propre K-invariant peut être inclus dans un sous-groupe de Borel K-invariant.*

Preuve

Soient K comme dans l'énoncé, et T un contre-exemple à notre affirmation que l'on peut supposer maximal. Alors d'après le Corollaire 2.2.12, T est un sous-groupe de Carter de G. Maintenant d'après le Fait 1.5.5, T est conjugué à Q, et en particulier il vient grâce au Corollaire 5.1.6 que $N(T) = T$ contient K, ce qui est absurde. □

Intermezzo - B_1

Lemme 5.1.10 *Soit $i \in V^\#$. Alors aucun sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(i)$ n'est abélien.*

Preuve
Si $B_i \geq C^\circ(i)$ est abélien, alors $B_i = C^\circ(V)$. En particulier les trois centralisateurs connexes $C^\circ(j)$ (pour $j \in V^*$) sont égaux à B_i, une contradiction au Lemme 5.1.3. $\square$

D'après le Lemme 5.1.10, si $B_i \geq C^\circ(i)$ ($i \in V^\#$) est un sous-groupe de Borel, alors B_i n'est pas abélien. En particulier, d'après le Fait 1.8.14, un tel sous-groupe de Borel admet un paramètre d'unipotence distinct de $(\infty, 0)$.

Notation 5.1.11 (Bach, Beethoven, Berlioz) *Soient pour* $i \in V^\#$
$\mathcal{B}(i) = \{$*sous-groupes de Borel de* G *contenant* $C^\circ(i)\}$,
$\tilde{q}_i = \max\{\tilde{q}$, *tels qu'il existe* $B \in \mathcal{B}(i)$ *admettant* $\tilde{q}$ *comme paramètre d'unipotence maximal*$\}$,
et un $B_i \in \mathcal{B}(i)$ *admettant* $\tilde{q}_i$ *comme paramètre d'unipotence maximal.*

Remarque 5.1.12
- *On prendra note qu'à la différence de l'analyse de* PSL_2, *nous maximisons sur les involutions* et *les sous-groupes de Borel. Dans la Notation 3.1.5 du chapitre 3, on fixait un sous-groupe de Borel et l'on en prenait un paramètre d'unipotence maximal ; nous avons ici laissé varier les sous-groupes de Borel, pourvu qu'ils contiennent un groupe* $C^\circ(i)$.
- *Les sous-groupes de Borel* B_i *sont ainsi fixés par choix, car rien dans la définition n'aurait garanti leur unicité.*
- *Bien que les trois sous-groupes de Borel* B_1, B_2, B_3 *ne sachent coïncider d'après le Lemme 5.1.3, à ce point de l'analyse deux d'entre eux pourraient être égaux.*
- *La notation renvoie au* mot *original de Cornelius, et non à sa reprise par Hans von Bülow.*

Nous hiérarchisons à présent les involutions en fonction du degré d'unipotence du sous-groupe de Borel qui leur est attaché depuis la Notation 5.1.11. Cela est nécessaire pour établir la conjugaison des involutions, qui sera prouvée bien plus tard.

Notation 5.1.13 *On suppose que* i_1 *est maximale :*

$$\tilde{q}_1 \geq \tilde{q}_2, \qquad \tilde{q}_1 \geq \tilde{q}_3.$$

Cela signifie d'une part que si $\tilde{q}_2$ ou $\tilde{q}_3$ est un paramètre en caractéristique première, alors $\tilde{q}_1$ est aussi un paramètre en caractéristique première (mais a priori pas forcément la même), et d'autre part, que si les trois sont en caractéristique nulle, alors on a les inégalités correspondantes sur les degrés d'unipotence.

B_1 est ainsi un sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(i_1)$, et de paramètre d'unipotence maximal parmi ceux des sous-groupes de Borel qui contiennent le centralisateur connexe d'une involution.

Remarque 5.1.14 *On ne classe pas encore* i_2 *et* i_3 *: pour la symétrie des preuves.*

Lemme 5.1.15 *Soit* $H < G$ *un* $\tilde{q}$*-sous-groupe définissable, avec* $\tilde{q} > \tilde{q}_1$. *Si une involution de* G *agit sur* H, *alors elle l'inverse. (En particulier* H *est* $2^\perp$*).*

Preuve
Soit k une involution de G normalisant H. D'après le Corollaire 5.1.2, k est conjuguée dans G à une involution de V. Si $k \in H$ qui est définissable connexe et nilpotent, alors k est centrale dans H. Dans ce cas $H \leq C^\circ(k)$, mais d'après les Notations 5.1.11 et 5.1.13, $\tilde{q} \leq \tilde{q}_1$, une contradiction. Ainsi H est $2^\perp$.

D'après le Fait 1.8.21, $C_H^\circ(k)$ est alors un $U_{\tilde{q}}$-sous-groupe de $C^\circ(k)$. Encore par maximalité de $\tilde{q}_1$, il vient $C_H^\circ(k) = 1$ et donc k inverse H. $\square$

Corollaire 5.1.16 *Soient* H *un sous-groupe définissable connexe résoluble* V*-invariant. Alors pour tout paramètre d'unipotence* $\tilde{q}$ *de* H, *on a* $\tilde{q} \leq \tilde{q}_1$.

Preuve
Supposons l'inégalité fausse. On peut supposer que $\tilde{q}$ est un paramètre d'unipotence maximal pour H. D'après le Fait 1.8.23, $U_{\tilde{q}}(H)$ est alors un $\tilde{q}$-groupe. D'après le Lemme 5.1.15, $U_{\tilde{q}}(H)$ est $2^\perp$ et inversé par les trois involutions de V. Alors en appliquant le Fait 5.0.2, on obtient que $U_{\tilde{q}}(H) = \langle C^\circ_{U_{\tilde{q}}(H)}(i_1), C^\circ_{U_{\tilde{q}}(H)}(i_2), C^\circ_{U_{\tilde{q}}(H)}(i_3)\rangle = 1$, une contradiction. $\square$

5.2 La campagne du premier centralisateur

Théorème 5.2.1 *$C^\circ(i_1) = B_1$.*

Supposons pour presque toute cette longue section le contraire. Attention, la §5.2.6 ne sera plus sous cette hypothèse absurde : on y développera une conséquence du Théorème 5.2.1.

$$\text{On suppose dorénavant } C^\circ(i_1) < B_1.$$

Nous devons ici rompre la symétrie et privilégier i_1. La cotoricité servira fréquemment, mais les Viergruppen n'interviennent pas dans l'idée directrice ; en effet la preuve du Théorème 5.2.1 suit de manière frappante la démarche du chapitre 3, plus spécifiquement de §3.3. On introduira donc des ensembles $T[w]$ pour contredire la simplicité du groupe ambiant. Ce n'est pas avoir manqué d'imagination : adapter cette technique exige une certaine attention.

Nous allons commencer par rendre B_1 distinct des deux autres sous-groupes de Borel (ce qui n'est pas trivial), puis reprendre l'étude des "pseudo-tores" $T[w]$. Ces ensembles s'avéreront génériquement concentrés dans B_1. Il faut noter que l'étude de la Section 5.1 permet les *dei ex machina* les plus inattendus.

Lemme 5.2.2 (cf. Lemme 3.1.2) *On peut supposer que $F^\circ(B_1)$ est sans involutions. Il suit que pour chaque $i \in V^\#$, on a la décomposition $B_1 = C^\circ_{B_1}(i) \cdot (F^\circ(B_1))^{-i}$, où chaque terme est de degré 1. En particulier, si un élément $x \in B_1$ est inversé par une involution de B_1 et que $d(x)$ est $2^\perp$, alors $x \in F^\circ(B_1)$.*

Preuve

Sinon $F^\circ(B_1)$ contient une involution k qui est centrale dans B_1. En particulier $B_1 = C^\circ(k)$. Il suffit alors de changer le nom de i_1 pour avoir que $C^\circ(i_1)$ est un sous-groupe de Borel de paramètre d'unipotence maximal $\tilde{q}_1$, contre l'hypothèse que $C^\circ(i_1) < B_1$. Ainsi $F^\circ(B_1)$ est-il $2^\perp$.

La décomposition provient alors des Faits 1.7.4 et 1.3.2, tout comme dans le Lemme 3.1.2. Enfin si $x \in B_1$ est inversé par une involution $j \in B_1$, on a une décomposition $x = cf$ avec des notations naturelles, et $x^2 = x^{-j}x = f^2$, donc $x^2 \in F^\circ(B_1)$. Comme $d(x)$ est sans involution, $d(x) = d(x^2)$ et donc $x \in F^\circ(B_1)$. □

Notation 5.2.3 *Soient pour chaque $w_1 \in i_1^G$ l'ensemble définissable*

$$T_1[w_1] = \left\{b \in B_1,\ b^{w_1} = b^{-1}\right\}$$

$$\text{et } I_1 = \left\{w_1 \in i_1^G \setminus N(B_1),\ \operatorname{rg}(T_1[w_1]) \geq \operatorname{rg}\left((F^\circ(B_1))^{-i_1}\right)\right\}.$$

Lemme 5.2.4 (cf. Lemme 3.1.28) *I_1 est un sous-ensemble (définissable) générique de i_1^G.*

Preuve

Similaire à celle du Lemme 3.1.28. □

A noter, nous ne travaillerons pas avec les $T_1[w_1]$, mais avec leur composante connexe. Une telle remarque suppose qu'on s'attende, conformément à l'analyse du chapitre 3, à ce que les $T_1[w_1]$ soient bien des groupes définissables !

5.2.1 B_1 distinct de B_2 et B_3

Cette sous-section est entièrement consacrée à l'indispensable proposition suivante.

Proposition 5.2.5 *On peut supposer $B_1 \neq B_2$ et $B_1 \neq B_3$ (simultanément).*

La preuve de la Proposition 5.2.5 va occuper quelques lemmes. On suppose $B_1 = B_2$.

Lemme 5.2.6 *i_3 inverse $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. En particulier $U_{\tilde{q}_1}(B_1) \leq Z(F^\circ(B_1))$.*

Preuve
En effet soit $X = C^{\circ}_{U_{\tilde{q}_1}(B_1)}(i_3)$, que l'on suppose non-trivial. Puisque $F^{\circ}(B_1)$ est sans involution d'après le Lemme 5.2.2, X est un $U_{\tilde{q}_1}$-groupe d'après le Fait 1.8.21 (ou par simple bon sens si $\tilde{q}_1$ est en caractéristique première). Comme $X \leq B_3$, on a d'après la Notation 5.1.13 $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_3$. Le Fait 1.8.1 ou 1.8.23 selon la caractéristique impose $X \leq F^{\circ}(B_3)$. Soit $N = N^{\circ}(X)$. Alors N contient $U_{\tilde{q}_1}(Z(F^{\circ}(B_1)))$ ainsi que $U_{\tilde{q}_1}(Z(F^{\circ}(B_3)))$.

Si le paramètre d'unipotence $\tilde{q}_1$ est maximal pour N, alors le Lemme 1.8.5 ou 1.9.1 selon la caractéristique entraîne $U_{\tilde{q}_1}(B_1) = U_{\tilde{q}_1}(B_3)$. En particulier $B_2 = B_1 = B_3$ et ceci contredit le Lemme 5.1.3. Ainsi le paramètre d'unipotence $\tilde{q}_1$ n'est pas maximal pour N. Pourtant V normalise X donc N, et c'est une contradiction au Corollaire 5.1.16. □

Notation 5.2.7
Soit $U_2 = C^{\circ}_{U_{\tilde{q}_1}(B_1)}(i_2) = (U_{\tilde{q}_1}(B_1))^{-i_1}$.
On définit également $U_1 = C^{\circ}_{U_{\tilde{q}_1}(B_1)}(i_1) = (U_{\tilde{q}_1}(B_1))^{-i_2}$.

Lemme 5.2.8 $U_{\tilde{q}_1}(B_1) = U_1 \oplus U_2$*, où chacun des deux termes est un* $\tilde{q}_1$*-groupe normal dans* B_1 *(éventuellement trivial).*

Preuve
L'involution i_3 inverse $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ qui est abélien et V-invariant, donc d'après le Fait 5.0.2 il vient $U_{\tilde{q}_1}(B_1) = \langle C^{\circ}_{U_{\tilde{q}_1}(B_1)}(i_1), C^{\circ}_{U_{\tilde{q}_1}(B_1)}(i_2)\rangle = U_1 + U_2$. La somme est directe : en effet on a $U_1 \cap U_2 \leq C_{U_{\tilde{q}_1}(B_1)}(i_3)$ qui est trivial puisque $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ n'a pas d'involution d'après le Lemme 5.2.2 et que i_3 l'inverse.

Chacun des deux termes U_1 et U_2 est un $\tilde{q}_1$-groupe d'après le Fait 1.8.21, ou de manière évidente, suivant la nature de $\tilde{q}_1$. Enfin U_1 comme U_2 est normal, d'après la décomposition du Lemme 5.2.2 et le fait que $U_{\tilde{q}_1}(B_1) \leq Z(F^{\circ}(B_1))$. □

Quitte à échanger i_1 et i_2 on peut supposer que $U_2 \neq 1$. En revanche on ne fait pas d'hypothèse sur U_1, ce que compense le lemme suivant.

Lemme 5.2.9 *Si* $U_1 = 1$*, alors* i_1 *et* i_2 *ne sont pas* G*-conjuguées.*

Preuve
Si $U_1 = 1$, alors d'après le Lemme 5.2.8, on a $U_{\tilde{q}_1}(B_1) = U_2$, et i_2 centralise $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. Supposons par ailleurs, en vue d'une contradiction, que $i_2 = i_1^g$ pour un $g \in G$.

Alors B_1^g est un sous-groupe de Borel de paramètre d'unipotence maximal $\tilde{q}_1$ et contenant $C^{\circ}(i_2)$. Or $B_2 = B_1$ impose que l'*unique* sous-groupe de Borel ayant ces propriétés est B_1. Il vient donc $g \in N(B_1)$. Maintenant comme i_2 centralise $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$, $i_1^g = i_2$ centralise $U_{\tilde{q}_1}(B_1) = (U_{\tilde{q}_1}(B_1))^g$ et donc i_1 centralise $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. Ainsi $U_{\tilde{q}_1}(B) = U_1$, une contradiction. □

Notation 5.2.10 *Soit* $w_1 \in I_1$ *(voir Notation 5.2.3).*

On remarquera qu'une seule involution de I_1 suffit dans cette sous-section.

Lemme 5.2.11 *Aucun sous-groupe strict définissable, connexe, et* w_1*-invariant ne contient* $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$.

Preuve
Au vu du Lemme 1.8.5, l'affirmation est évidente si $\tilde{q}_1$ est de la forme (p_1, ∞). En effet w_1 ne normalise pas B_1, par définition de I_1 (Notation 5.2.3). On suppose donc que $\tilde{q}_1$ est un paramètre d'unipotence de caractéristique nulle.

Soient H comme dans l'énoncé et $\tilde{q} \geq \tilde{q}_1$ un paramètre d'unipotence maximal pour H, que l'on prend aussi en caractéristique nulle. Alors $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ et $U_{\tilde{q}_1}(B_1)^{w_1}$ sont inclus dans H. Si $\tilde{q} = \tilde{q}_1$, alors le Lemme 1.9.1 impose $w_1 \in N(U_{\tilde{q}_1}(B_1))$. Dans ce cas $w_1 \in N(B_1)$, contre la définition de I_1 (Notation 5.2.3). On a donc $\tilde{q} > \tilde{q}_1$. Notamment d'après le Lemme 5.1.15, w_1 inverse $U_{\tilde{q}}(H)$.

D'autre part $U_{\tilde{q}_1}(B_1) \leq H$ est d'après le Lemme 1.9.1 un $\tilde{q}_1$-sous-groupe de Sylow de H. D'après le Corollaire 2.1.6 il existe donc une H-conjuguée w' de w_1 qui normalise $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. Notamment w' normalise B_1. Par cotoricité, on a $w' \in B_1$. On considère la classe de conjugaison de w' dans B_1.

Si w' est, dans B_1, conjuguée à i_1 ou à i_3, alors w' inverse $U_2 \leq H$ ainsi que $U_\infty(H)$. Le Lemme 1.3.1 impose $[U_2, U_\infty(H)] = 1$, et donc $U_\infty(H) \leq C^\circ(U_2) \leq B_1$, ce qui contredit $\tilde{q} > \tilde{q}_1$.

Si w' est dans B_1 conjuguée à i_2, alors en particulier i_1 et i_2 sont G-conjuguées. D'après le Lemme 5.2.9, $U_1 \neq 1$. Donc w' inverse $U_1 \leq H$, ainsi que $U_\infty(H)$. Dans ce cas le Lemme 1.3.1 impose $[U_1, U_\infty(H)] = 1$, et donc $U_\infty(H) \leq C^\circ(U_1) \leq B_1$, ce qui contredit encore $\tilde{q} > \tilde{q}_1$. □

Corollaire 5.2.12 *$T_1[w_1]$ est un groupe abélien définissable.*

Preuve
Soit $X = F^\circ(B_1) \cap F^\circ(B_1)^{w_1}$. On suppose $X \neq 1$, et le Lemme 5.2.11 appliqué à $N^\circ(X)$ entraîne une contradiction. □

Notation 5.2.13 *Soit $A_2 \leq U_2$ un sous-groupe B_1-minimal.*

Lemme 5.2.14 *A_2 est un $\tilde{q}_1$-sous-groupe définissable et normal de B_1, inversé par i_1 et i_3, et centralisé par i_2.*

Preuve
Tout découle de la définition de U_2 (Notation 5.2.7), sauf le fait que A_2 soit bien un $\tilde{q}_1$-groupe si ce paramètre est de caractéristique nulle. Dans ce cas, nous invoquons le Fait 1.8.26 : en effet $U_2 \leq [U_{\tilde{q}_1}(B_1), B_1]$ est alors $\tilde{q}_1$-homogène, et A_2 est bien un $\tilde{q}_1$-groupe. □

Corollaire 5.2.15 $C^\circ_{T_1[w_1]}(A_2) = 1$.

Preuve
Nous prouvons d'abord que $T_1[w_1] \cap F^\circ(B_1) = 1$. Soit en effet $t \in F^\circ(B_1)$ inversé par w_1. Alors $C^\circ(t)$ contient $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$, et le Lemme 5.2.11 appliqué à $C^\circ(t)$ impose une contradiction.

Soit maintenant $t \in C_{T_1[w_1]}(A_2)$. Alors $A_2 \leq C^\circ(t)$. Soit L_2 un $\tilde{q}_1$-sous-groupe de Sylow de $C^\circ(t)$ contenant A_2. Comme $C^\circ(t)$ est w_1-invariant, il existe d'après le Corollaire 2.1.6 une involution w' conjuguée à w_1 sous $C^\circ(t)$ et qui normalise L_2.

Mais d'après le Lemme 1.8.5 ou 1.9.1, $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ est l'unique $\tilde{q}_1$-sous-groupe de Sylow de G contenant A_2. En particulier w' normalise $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$, et il vient par cotoricité $w' \in B_1$. L'élément $t \in B_1$ est ainsi inversé par l'involution w' de B_1. D'après le Fait 1.7.4, il existe $f \in F^\circ(B_1)$ tel que $t^{-1} = t^{w'} = tf$, et donc $t^2 \in T_1[w_1] \cap F^\circ(B_1) = 1$. Ainsi t est une involution de $T_1[w_1]$, lequel est abélien. En type impair, on a donc borné le cardinal de $C_{T_1[w_1]}(A_2)$ par 4. □

Preuve de la Proposition 5.2.5
Remarquons que le Corollaire 5.2.15 implique que $B_1/C_{B_1}(A_2)$ n'est pas trivial. Le théorème du corps, Fait 1.6.1, appliqué au groupe $A_2 \rtimes B_1/C_{B_1}(A_2)$ fait alors apparaître un corps algébriquement clos K tel que $A_2 \simeq K_+$ et $B_1/C(A_2) \hookrightarrow K^\times$.

Maintenant d'après le Corollaire 5.2.15, l'image de $T_1[w_1]$ dans $K^\times$ est encore de rang égal à $\mathrm{rg}(T_1[w_1]) \geq \mathrm{rg}(F^\circ(B_1))^{-i_1} \geq \mathrm{rg}(A_2) = \mathrm{rg}(K_+)$. Ainsi $K^\times$ est-il isomorphe à un quotient de $T_1[w_1]$ par un sous-groupe fini ; en particulier $T_1[w_1]$ contient un 2-tore.

Ce 2-tore est inversé par w_1, une contradiction au Corollaire 5.1.2 qui achève le cas $B_2 = B_1$. Nous avons prouvé que $B_1 \neq B_2$, et comme aucune hypothèse ne distingue pour le moment i_2 et i_3, on a $B_1 \neq B_3$ de même. □

5.2.2 Reprise des affaires

Le lemme suivant est vide de contenu. D'une part il semble intuitif que le cas d'unipotence de torsion ne posera aucun problème : les U_p conventionnels offrent un analogue irréprochable des O du cas ordinaire, il suffit d'imiter [CJ04], et dans le pire des cas il y aurait le théorème de Wagner ! D'autre part la preuve ressemble à un tour de passe-passe.

Lemme 5.2.16 *B_1 est sans unipotence de torsion.*

Preuve
On suppose $U_p(B_1) \neq 1$ pour un nombre premier $p \neq 2$. Soit $H = (B_1 \cap B_2)^\circ \geq C^\circ(V) \geq V$. Supposons H non-abélien. Dans ce cas, $Z^\circ(U_p(B_1)) \leq N^\circ(H')$, mais le Lemme 1.8.5 impose que B_1 est l'unique sous-groupe de Borel contenant $Z^\circ(U_p(B_1))$. Ainsi $Z(F^\circ(B_2)) \leq N^\circ(H') \leq B_1$. C'est encore le Lemme 1.8.5 qui implique que B_2 n'a pas d'unipotence de torsion. Le paramètre d'unipotence $\tilde{q}_2$ est donc de la forme (∞, d_2). Mais $1 \neq U_{(\infty,d_2)}(Z(F^\circ(B_2))) \leq B_1$. Cette fois c'est le Lemme 1.9.1 appliqué avec $U_{(\infty,d_2)}(Z(F^\circ(B_2)))$ dans les deux rôles qui impose que (∞, d_2) n'est pas un paramètre d'unipotence maximal pour B_1. Ainsi $d_\infty(B_1) > d_\infty(B_2)$. Nous sommes donc en présence d'une intersection non-abélienne telle que $d_\infty(B_1) > d_\infty(B_2)$. D'après le Fait 1.8.31 (4), la paire (B_1, B_2) est maximale. D'après le Fait 1.8.33 (7), $F^\circ(B_1)$ est sans p-unipotence, une contradiction.

H est ainsi abélien. En particulier $H = C^\circ(V)$ et $C^\circ_{B_1}(i_2) = C^\circ(V)$. Comme on a simultanément $B_1 \neq B_3$ d'après la Proposition 5.2.5, les mêmes arguments impliquent $C^\circ_{B_1}(i_3) = C^\circ(V)$. Alors le Fait 5.0.2 implique $B_1 = \langle C^\circ_{B_1}(i_1), C^\circ_{B_1}(i_2), C^\circ_{B_1}(i_3)\rangle = \langle C^\circ(i_1), C^\circ(V), C^\circ(V)\rangle = C^\circ(i_1)$, une contradiction. □

Ainsi $\tilde{q}_1$ est-il de la forme (∞, d_1). Nous garderons ce fait à l'esprit, et n'y ferons plus référence. Il faut noter que l'on en pourrait mener une autre preuve avec le théorème de Wagner, Fait 1.6.3, de manière analogue à celle du Lemme 3.3.10 du chapitre 3.

Lemme 5.2.17 *Les involutions i_2 et i_3 inversent $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ qui est abélien, et i_1 le centralise.*

Preuve
Soit $X = C^\circ_{U_{\tilde{q}_1}(B_1)}(i_2)$ et supposons $X \neq 1$. D'après le Lemme 5.2.2 et le Fait 1.8.21, X est un $\tilde{q}_1$-groupe. Formons $N = N^\circ(X) \geq X$. Alors N est V-invariant car X l'est, si bien que d'après le Corollaire 5.1.16, N admet $\tilde{q}_1$ pour paramètre d'unipotence maximal.

Maintenant $X \leq B_2$ donc par définition de $\tilde{q}_1$ il vient $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2$, et $X \leq U_{\tilde{q}_1}(B_2)$ grâce au Fait 1.8.23. Notamment $U_{\tilde{q}_1}(Z(F^\circ(B_2))) \leq N$, et le Lemme 1.9.1 impose que $U_{\tilde{q}_1}(B_2)$ est le seul $\tilde{q}_1$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{q}_1}(N)$. Mais comme d'autre part $U_{\tilde{q}_1}(Z(F^\circ(B_1))) \leq N$, le Lemme 1.9.1 implique de même que $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ est le seul $\tilde{q}_1$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{q}_1}(N)$. Il vient $B_1 = B_2$, une contradiction à la Proposition 5.2.5.

Ainsi i_2 inverse bien $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. Comme aucune hypothèse n'a été faite pour distinguer i_2 et i_3, il est clair que i_3 aussi agit par inversion. L'involution i_1 centralise $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$, qui est abélien. □

5.2.3 Réduction de $T_1[w_1]$

L'élimination de la torsion dans les ensembles $T_1[w_1]$ était une étape essentielle de §3.3. Ici nous butons sur un léger problème, à savoir la possibilité d'une involution résiduelle. On travaillera donc avec les ensembles $\tau_1[w_1]$, définis ci-après, et qu'il faut penser comme la composante connexe des $T_1[w_1]$. Cela ne sera justifié que lorsqu'on aura prouvé leur abélianité dans le Corollaire 5.2.24.

Notation 5.2.18 *Pour w_1 dans I_1, soit $\tau_1[w_1]$ l'ensemble des carrés des éléments de $T_1[w_1]$.*

Lemme 5.2.19 (cf. Lemme 3.3.9) *$\tau_1[w_1]$ est un sous-ensemble générique de $T_1[w_1]$, et formé d'éléments dont la clôture définissable est sans torsion.*

Preuve
Nous commençons par l'étude des éléments de torsion de $T_1[w_1]$. Soit $t \in T[w_1]$ un p-élément, où p est un nombre premier ; on montre que t est une involution. Rappelons que B_1 est sans p-unipotence, d'après le Lemme 5.2.16. Soit P un p-sous-groupe de Sylow de B_1 contenant t, P est un p-tore. L'involution w_1 normalise $C^\circ(t) \geq C^\circ(P)$ qui contient d'après le Fait 1.5.4 un 2-tore maximal de B_1 et de G, disons S_1°. Par cotoricité, il vient $w_1 \in S_1^\circ \leq C^\circ(P) \leq C^\circ(t)$, et pourtant w_1 inverse t. L'élément t est donc une involution. A ce point il est clair que si $t \in \tau_1[w_1]$, alors sa clôture définissable $d(t)$ est bien sans torsion. Nous prouvons désormais la généricité de $\tau_1[w_1]$ dans $T_1[w_1]$.

Remarquons qu'une involution k de $T_1[w_1]$ ne peut pas être B_1-conjuguée à i_1. En effet sinon il vient par cotoricité $w_1 \in C^\circ(k) \leq B_1$ par définition de B_1, et cela contredit la définition de $w_1 \in I_1$.

Soient maintenant k et ℓ deux involutions supposées distinctes de $T[w_1]$. D'après ce que nous venons de remarquer, k et ℓ sont B_1-conjuguées à i_2 ou i_3. En particulier elles inversent $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ d'après le Lemme 5.2.17. Ainsi $U_{\tilde{q}_1}(B_1) \leq C^\circ(k\ell)$. Ce dernier groupe, que nous noterons X, est w_1-invariant car $(k\ell)^{w_1} = k\ell$. Soit $\tilde{q}$ un paramètre d'unipotence maximal pour $X = C^\circ(k\ell)$. Si $\tilde{q} = \tilde{q}_1$, alors le Fait 1.8.23 impose que $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ est définissablement caractéristique dans X, donc que w normalise $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. Il vient $w_1 \in N(B_1)$, une contradiction. Donc $\tilde{q} > \tilde{q}_1$. Pourtant X est $\langle w_1, k\rangle = \{1, w_1, k, w_1k\}$-invariant, et cela contredit le Corollaire 5.1.16.

$T_1[w_1]$ possède donc au plus une involution. S'il n'y en a pas, il est évident que pour chaque $t \in T_1[w_1]$, la clôture définissable $d(t)$ est 2-divisible, et donc que $\tau_1[w_1] = T_1[w_1]$. Sinon, soit k l'unique involution de $T_1[w_1]$. Soit $Y = T[w_1] \setminus \tau_1[w_1]$. Alors la multiplication à gauche par k est une injection définissable de Y dans $\tau_1[w_1]$, et il est clair que $\tau_1[w_1]$ est bien générique dans $T_1[w_1]$.
$\square$

L'involution w_1 inverse point-à-point l'ensemble $\tau_1[w_1]$, et $\mathrm{rg}(\tau_1[w_1]) \geq \mathrm{rg}(F^\circ(B))^{-i_1}$. En outre $\tau_1[w_1]$ a cette propriété essentielle que si $t \in \tau_1[w_1]$, alors $d(t) \subseteq \tau_1[w_1]$. On travaillera donc avec $\tau_1[w_1]$ au lieu de $T_1[w_1]$, et la preuve suivra celle de §3.3.

Lemme 5.2.20 (cf. Corollaire 3.3.8) $\forall t \in \tau_1[w_1]^\#$, $C_{B_1}(t) \cap i_1^{B_1} = \emptyset$.

Preuve
Soient $t \in \tau_1[w_1]^\#$ et une involution $j_1 \in i_1^{B_1}$ qui centralise t. L'involution w_1 normalise $C(t)$ qui contient j_1. D'après le Lemme 2.1.1, il existe une involution w_1' conjuguée sous $C(t)$ à w_1 et telle que $[w_1', j_1] = 1$. Notons que $w_1' \neq j_1$, car sinon t serait une involution, ce que le Lemme 5.2.19 interdit. En outre on a grâce à la cotoricité $w_1' \in C^\circ(j_1) \leq B_1$ par définition de B_1.

D'après le Lemme 5.2.17, l'action de w_1' sur $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ est par centralisation ou bien par inversion, mais "sans mélange". Comme w_1' inverse $d(t)$ qui est 2-divisible au vu du Lemme 5.2.19, le Lemme 1.3.1 impose $[d(t), U_{\tilde{q}_1}(B_1)] = 1$. Ainsi $U_{\tilde{q}_1}(B_1) \leq C^\circ(t)$. Puisque $C^\circ(t)$ est $\langle w_1', j_1\rangle$-invariant, le Corollaire 5.1.16 implique que $C^\circ(t)$ admet $\tilde{q}_1$ pour paramètre d'unipotence maximal. Ainsi $U_\infty(B_1) = U_\infty(C^\circ(t))$. Pourtant ce dernier groupe est w_1-invariant, donc w_1 normalise $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$, une contradiction. $\square$

Lemme 5.2.21 (cf. Corollaire 3.3.14) *Il existe un entier $s \geq 1$ et un (∞, s)-sous-groupe abélien de $d(\tau_1[w_1])$ qui est inclus dans $\tau_1[w_1]$ et qui ne centralise pas $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$.*

Preuve
Supposons que chaque t de $\tau_1[w_1]$ centralise $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. Selon le Lemme 1.9.1, $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ est un sous-groupe de Sylow de $C^\circ(t)$ qui est w_1-invariant. D'après le Corollaire 2.1.6, il existe une involution w' conjuguée sous $C^\circ(t)$ à w_1 et qui normalise $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. Prenant les normalisateurs connexes et par cotoricité, on a $w' \in B_1$. Ainsi $w' \in B_1$ inverse $d(t)$. Mais $d(t)$ est un groupe sans torsion d'après le Lemme 5.2.19 ; le Lemme 5.2.2 implique $d(t) \leq F^\circ(B_1)$. Conjuguant par w_1, on a aussi $d(t) \leq F^\circ(B_1)^{w_1}$, et cela est valable pour chaque t de $\tau_1[w_1]$.

Alors grâce au Lemme 5.2.19, $\tau_1[w_1] \subseteq (F^\circ(B_1) \cap F^\circ(B_1)^{w_1})^\circ$ qui est un groupe définissable connexe nilpotent inclus dans deux sous-groupes de Borel distincts, donc abélien d'après le Corollaire 1.8.34. En particulier $\tau_1[w_1]$ est également un groupe abélien. Maintenant $C^\circ(\tau_1[w_1])$ est un groupe w_1-invariant qui contient $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. D'après le Corollaire 2.1.6, il existe une involution w' conjuguée sous $C^\circ(\tau_1[w_1])$ à w_1 et qui normalise $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. Passant aux normalisateurs connexes et par cotoricité, on a $w' \in B_1$. L'involution $w' \in B_1$ inverse donc tout le groupe $\tau_1[w_1]$.

Soit $\tilde{q}$ un paramètre d'unipotence maximal pour $C^\circ(\tau_1[w_1])$. Si $\tilde{q} = \tilde{q}_1$, alors d'après le Fait 1.8.23, $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ est définissablement caractéristique dans $C^\circ(\tau_1[w_1])$, et en particulier $w_1 \in N(B_1)$, une contradiction. Donc $\tilde{q} > \tilde{q}_1$. D'après le Lemme 5.1.15, w' inverse $U_\infty(C^\circ(\tau_1[w_1]))$. Si dans B_1, w' est conjuguée à i_2 ou à i_3, alors d'après le Lemme 5.2.17, w' inverse $U_{\tilde{q}_1}(B_1) \leq C^\circ(\tau_1[w_1])$, et le Lemme 1.3.1 impose $U_\infty(C^\circ(\tau_1[w_1])) \leq B_1$, une contradiction.

Ainsi w' est-elle une B_1-conjuguée de i_1. Elle inverse donc dans B_1 un ensemble de rang exactement $\mathrm{rg}(F^\circ(B_1))^{-i_1} = \mathrm{rg}(\tau_1[w_1])$ par définition de I_1 (Notation 5.2.3). Alors $\tau_1[w_1] \subseteq (F^\circ(B_1))^{-w'}$

est l'unique sous-groupe générique dans l'ensemble $(F^\circ(B_1))^{-w'}$ qui est de degré 1 d'après le Lemme 5.2.2. En particulier $\tau_1[w_1]$ est ainsi normalisé par $C^\circ(w')$, et il vient que le sous-groupe définissable $\tau_1[w_1] \rtimes C^\circ(w')$ est générique dans B_1. Comme ce dernier est connexe, on a $B_1 = \tau_1[w_1] \rtimes C^\circ(w')$, et donc $\tau_1[w_1]$ est normal dans B_1. Ainsi w_1 normalise $B_1 = N^\circ(\tau_1[w_1])$, une contradiction. L'hypothèse faite au début de cette preuve est absurde.

Il y a donc un $t \in \tau_1[w_1]$ ne centralisant pas $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. Considérons alors la clôture définissable $d(t)$, et passons modulo $C_{d(t)}(U_{\tilde{q}_1}(B_1))$. L'image $\overline{d(t)}$ est non-triviale par choix de t, et sans torsion d'après le Lemme 5.2.19 et le Fait 1.4.1. En particulier, d'après le Fait 1.8.14, $\overline{d(t)}$ admet un paramètre d'unipotence, qui est nécessairement de la forme (∞, s). Maintenant le Fait 1.8.17 (2) implique qu'il existe un (∞, s)-sous-groupe définissable de $d(t)$ qui n'est pas nul dans la projection, c'est-à-dire qui ne centralise pas $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. $\square$

Notation 5.2.22 (cf. Notation 3.3.15) *Soient, comme dans le Lemme 5.2.21, s un entier ≥ 1 et T_s un (∞, s)-groupe abélien inclus dans $\tau_1[w_1]$.*

Proposition 5.2.23 (cf. Proposition 3.3.17) *$B_1 \cap B_1^{w_1}$ est abélien.*

Preuve

Sinon $X = F(B_1) \cap F(B_1^{w_1})$ n'est pas trivial. D'après le Fait 1.8.4, il n'y a pas de torsion dans X, en particulier $X = F^\circ(B_1) \cap F^\circ(B_1^{w_1}) = (F(B_1) \cap F(B_1^{w_1}))^\circ$.

Soient $N = N^\circ(X)$ et $\tilde{q}$ un paramètre d'unipotence maximal pour N. Comme w_1 normalise $N \geq U_{\tilde{q}_1}(B_1)$, il faut $\tilde{q} > \tilde{q}_1$ pour échapper à la contradiction usuelle. Non moins habituellement, il existe une involution w' conjuguée sous N à w_1 et qui normalise $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$. En particulier $w' \in B_1$ pour les raisons fréquentes. En outre w_1 et w' doivent toutes deux inverser $U_\infty(N)$ d'après le Lemme 5.1.15.

Si w' est conjuguée dans B_1 à i_2 ou à i_3, alors d'après le Lemme 5.2.17, elle inverse $U_\infty(B_1)$. Comme w' inverse aussi $U_\infty(N)$ et que l'un normalise l'autre, il vient grâce au Lemme 1.3.1 $[U_\infty(B_1), U_\infty(N)] = 1$, donc $U_\infty(N) \leq C^\circ(U_\infty(B_1)) \leq B_1$, une contradiction. Donc $w' \in i_1^{B_1}$.

Comme $\tilde{q} > \tilde{q}_1$, $N^\circ_{B_1}(X)$ est inclus dans deux sous-groupes de Borel distincts. D'après le Fait 1.8.32, $(N^\circ_{B_1}(X))'$ est homogène. D'autre part selon le Fait 1.8.26, $[T_s, U_{\tilde{q}_1}(B_1)]$ est un $\tilde{q}_1$-groupe homogène, et non-trivial par choix de T_s (Notation 5.2.22). Comme il est inclus dans $(N^\circ_{B_1}(X))'$, on en déduit que $(N^\circ_{B_1}(X))'$ est $\tilde{q}_1$-homogène. Comme $((B_1 \cap B_1^{w_1})^\circ)' \leq (N^\circ_{B_1}(X))'$, il vient que $((B_1 \cap B_1^{w_1})^\circ)'$ est lui aussi $\tilde{q}_1$-homogène.

On montre à présent que $F^\circ(B_1)$ est abélien. Sinon, X est homogène d'après le Lemme 1.10.1. Comme X contient $((B_1 \cap B_1^{w_1})^\circ)'$ qui est $\tilde{q}_1$-homogène, X est ainsi $\tilde{q}_1$-homogène. Maintenant pour chaque $r < d_\infty(B_1)$, la décomposition centrale du Fait 1.8.18 implique $F_r(B_1) \leq C^\circ(X) \leq N$ qui n'est pas inclus dans B_1, car $d_\infty(N) > d_\infty(B_1)$. Comme d'autre part $F_r(B_1) \leq B_1$, le Corollaire 1.8.34 implique que $F_r(B_1)$ est abélien. Donc chaque $F_r(B_1)$ est abélien pour $r < d_\infty(B_1)$. Comme $U_\infty(B_1)$ l'est aussi grâce au Lemme 5.2.17, la décomposition du Fait 1.8.18 implique que $F^\circ(B_1)$ est abélien.

On forme enfin $Y = (F^\circ(B_1))^{-i_1}$. Y est un sous-groupe car $F^\circ(B_1)$ est abélien, et non-trivial - c'est l'hypothèse de cette section ! Comme $w' \in i_1^{B_1}$, la décomposition donnée dans le Lemme 5.2.2 impose que w' aussi inverse Y, lequel est par ailleurs inclus dans N. Comme d'autre part, w' inverse $U_\infty(N)$, le lemme 1.3.1 implique $[Y, U_\infty(N)] = 1$. Ainsi $N \leq C^\circ(Y)$, mais $Y \triangleleft B_1$. En particulier $\tilde{q}_1 \geq \tilde{q}$, une contradiction. $\square$

Jumelant avec le Lemme 5.2.19, on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 5.2.24 *$T_1[w_1]$ et $\tau_1[w_1]$ sont des groupes abéliens définissables. $T_1[w_1]$ est d'indice au plus 2 sur sa composante connexe $\tau_1[w_1]$, qui est divisible.*

Lemme 5.2.25 (cf. Lemme 3.3.11) *Aucune involution de B_1 n'inverse $\tau_1[w_1]$. Aucune involution de $i_1^{B_1}$ ne centralise $\tau_1[w_1]$.*

Preuve

Si une involution de B_1 inverse $\tau_1[w_1]$, alors $\tau_1[w_1]$ étant sans torsion, le Lemme 5.2.2 implique $\tau_1[w_1] \leq F^\circ(B_1)$. Comme $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ est abélien (Lemme 5.2.17), on a $T_s \leq \tau_1[w_1] \leq C^\circ(U_{\tilde{q}_1}(B_1))$, contre la définition de T_s (Notation 5.2.22).

Soit maintenant $j_1 \in i_1^{B_1}$ centralisant $\tau_1[w_1]$. Alors $j_1 \in C(\tau_1[w_1])$ qui est w_1-invariant, donc d'après le Lemme 2.1.1 il existe une involution w' conjuguée sous $C(\tau_1[w_1])$ à w_1 et qui centralise j_1. Mais comme j_1 est conjuguée à i_1 dans B_1, on a $C^\circ(j_1) \leq B_1$, et par cotoricité $w' \in B_1$. Pourtant w' comme w_1 inverse $\tau_1[w_1]$, ce qui contredit l'affirmation précédente. □

5.2.4 Apparition de la paire maximale et scission de B_1

Lemme 5.2.26 *Il existe un sous-groupe de Borel distinct de B_1 et contenant $C^\circ_{B_1}(\tau_1[w_1])$.*

Preuve
On prend un sous-groupe de Borel contenant $C^\circ_{B_1}(\tau_1[w_1])$; si ce n'est pas B_1, il convient ; si c'est B_1, alors $B_1^{w_1}$ convient. □

Notation 5.2.27 *Soit $B_M \geq C^\circ_{B_1}(\tau_1[w_1])$ un sous-groupe de Borel distinct de B_1 et maximisant $H = (B_1 \cap B_M)^\circ$ parmi de telles intersections.*

Proposition 5.2.28 (cf. Proposition 3.3.25) *H n'est pas abélien.*

Preuve
On suppose H abélien. Soit $t \in \tau_1[w_1]$. Alors $H \leq C_{B_1}(t)$ qui ne coupe pas $i_1^{B_1}$ d'après le Lemme 5.2.20, et donc H n'est pas un sous-groupe de Carter de B_1.

Par hypothèse $H \leq C^\circ_{B_1}(\tau_1[w_1]) \leq H$ et donc $H = C^\circ_{B_1}(\tau_1[w_1])$. Si B_0 est un sous-groupe de Borel distinct de B_1 et contenant $N^\circ(H)$, alors B_0 est comme dans la Notation 5.2.27, et $(B_1 \cap B_0)^\circ \geq N^\circ_{B_1}(H) > H$, une contradiction avec la maximalité définissant H. B_1 est donc le seul sous-groupe de Borel contenant $N^\circ(H)$. En particulier $N^\circ_{C^\circ(\tau_1[w_1])}(H) \leq C^\circ_{B_1}(\tau_1[w_1]) = H$.

H est ainsi un sous-groupe de Carter de $C^\circ(\tau_1[w_1])$ qui est w_1-invariant. D'après le Corollaire 2.1.5, il existe une involution w' conjuguée sous $C^\circ(\tau_1[w_1])$ à w_1 qui normalise H. L'involution w' normalise aussi l'unique sous-groupe de Borel contenant son normalisateur. Donc w' normalise B_1 et $w' \in B_1$ par cotoricité. Ainsi $w' \in B_1$ inverse $\tau_1[w_1]$, et c'est une contradiction au Lemme 5.2.25. □

Comme dans le paragraphe liant la Proposition 3.3.25 et le Lemme 3.3.26, notons que nous sommes en présence d'une intersection maximale non-abélienne au sens de la théorie de [Bur07].

Lemme 5.2.29 (cf. Lemmes 3.3.26 et 3.3.27) *$d_\infty(H') = s$ et $d_\infty(B_1) > d_\infty(B_M)$.*

Preuve
D'après le Fait 1.8.32, H' est un groupe homogène. On suppose que son unique degré d'unipotence noté r' est distinct de s. Alors d'après le Fait 1.8.30, les (∞, s)-sous-groupes de Sylow de H sont inclus dans ses sous-groupes de Carter. T_s est donc inclus dans un sous-groupe de Carter Q_H de H. Or Q_H est de rang de Prüfer au plus 1, car d'après le Lemme 5.2.20, $C^\circ_{B_1}(\tau_1[w_1])$ ne coupe pas $i_1^{B_1}$. En particulier Q_H n'est un sous-groupe de Carter ni de G, ni de B_1. L'examen du Lemme 1.10.2, dont nous adoptons la notation $(Q_H)_{r'}$, laisse subsister le seul cas où l'unique sous-groupe de Borel contenant $N^\circ_G((Q_H)_{r'})$ est B_1.

Ainsi $N^\circ_{C^\circ(\tau_1[w_1])}(Q_H) \leq (B_1 \cap C^\circ(\tau_1[w_1]))^\circ \leq H$ par définition de H. En particulier, Q_H est un sous-groupe de Carter de $C^\circ(\tau_1[w_1])$. Mais d'après le Corollaire 2.1.6, il existe une involution w' conjuguée sous $C^\circ(\tau_1[w_1])$ à w_1 qui normalise Q_H. Alors w' normalise B_1 qui jouit d'une propriété d'unicité définie à partir de Q_H. Par cotoricité, $w' \in B_1$. L'involution $w' \in B_1$, tout comme w_1, inverse $\tau_1[w_1]$. C'est une contradiction au Lemme 5.2.25. Le premier point est ainsi prouvé.

On suppose à présent $d_\infty(B_1) \leq d_\infty(B_M)$. Par l'asymétrie du Fait 1.8.31 (4), on a même $d_\infty(B_1) < d_\infty(B_M)$. D'après le Fait 1.8.33, on a alors pour chaque $r \neq s$ que $F_r(B_1) \leq Z(H)$. C'est notamment le cas pour $d_\infty(B_1) > s$, et il vient donc que $U_{\tilde{q}_1}(B_1) \leq Z(H)$. En particulier $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ commute avec $\tau_1[w_1]$, une contradiction. □

Corollaire 5.2.30 *Un sous-groupe de Carter de H est un sous-groupe de Carter de B_1, donc de G, et donc de B_M.*

Notation 5.2.31 *A conjugaison près, nous supposerons que le sous-groupe de Carter Q (défini dans la Notation 5.1.4) est inclus dans H.*

Notation 5.2.32 *Soit $\Sigma = F_s(H) = U_{(\infty,s)}(H)$ (nous renvoyons au Fait 1.8.33).*

Lemme 5.2.33 (cf. Lemme 3.3.32, noter l'embarras évident face aux involutions) *Σ est un (∞, s)-sous-groupe de Sylow abélien de B_1. Il contient $\tau_1[w_1]$ qui est (∞, s)-homogène.*

Preuve

Comme Σ est définissable, connexe, nilpotent, et inclus dans deux sous-groupes de Borel distincts, il est abélien d'après le Corollaire 1.8.34.

Soit $L \geq \Sigma$ un (∞, s)-sous-groupe de Sylow de B_1. D'après le Fait 1.8.33 (3), $N^\circ(F_s(H)) \leq B_M$. Il vient donc $N_L^\circ(\Sigma) \leq (L \cap B_M)^\circ \leq H$ donc $U_{(\infty,s)}(N_L^\circ(\Sigma)) \leq \Sigma$. Le Fait 1.8.27 impose $L = \Sigma$.

Soit enfin $(\infty, s') \neq (\infty, s)$ un paramètre d'unipotence apparaissant dans $\tau_1[w_1]$, et $T_{s'} \leq \tau_1[w_1]$ un sous-groupe indécomposable de ce degré d'unipotence. H' est (∞, s)-homogène d'après le Fait 1.8.32 et le Lemme 5.2.29, donc grâce au Fait 1.8.30, $T_{s'}$ s'inclut dans un sous-groupe de Carter de H. En particulier $C_H^\circ(T_{s'})$ est de rang de Prüfer 2, contre le Lemme 5.2.20. Ainsi $\tau_1[w_1]$ est-il (∞, s)-homogène, et notamment, il est inclus dans Σ par définition de celui-ci. □

Notation 5.2.34 (cf. Notation 3.3.33) *Soit $K_1 = [\Sigma, i_1]$.*

Proposition 5.2.35 (cf. Lemme 3.3.34) *K_1 ne dépend pas de i_1, ni de w_1. C'est un (∞, s)-groupe abélien homogène et sans involutions, de même rang que $\tau_1[w_1]$. Enfin $B_1 = K_1 \rtimes C^\circ(i_1)$ et B_1 est l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(K_1)$.*

Preuve

Le théorème des indécomposables de Zilber entraîne la connexité de K_1. Maintenant K_1 qui est abélien ne peut pas posséder de 2-tore, car ce serait un 2-tore inversé par i_1, contre le Corollaire 5.1.2. Comme K_1 est connexe, il est sans involution d'après le Fait 1.4.4.

On considère l'action de i_1 sur Σ qui est abélien, connexe, et 2-divisible car sans 2-unipotence. D'après le Fait 1.3.3, on a $\Sigma = C_\Sigma(i_1)(+)\Sigma^{-i_1}$, où le symbole $(+)$ signifie que l'intersection est finie. Il est clair que $K_1 = (\Sigma^{-i_1})^\circ$, et il vient donc $\mathrm{rg}(\Sigma) = \mathrm{rg}(C_\Sigma(i_1)) + \mathrm{rg}(K_1)$.

D'après le Lemme 5.2.20 $\tau_1[w_1] \cap C^\circ(i_1) = 1$, et donc $\mathrm{rg}(\tau_1[w_1]) \leq \mathrm{rg}(\Sigma) - \mathrm{rg}\, C_\Sigma^\circ(i_1) = \mathrm{rg}(K_1)$. D'autre part K_1 est un groupe $2^\perp$ inversé par $i_1 \in B_1$. Avec le Lemme 5.2.2, on a $K_1 \subseteq (F^\circ(B_1))^{-i_1}$. Mais par définition de w_1, il vient $\mathrm{rg}(\tau_1[w_1]) \geq \mathrm{rg}(F^\circ(B_1)^{-i_1}) \geq \mathrm{rg}(K_1)$, donc tous ces rangs sont égaux.

K_1 est alors un sous-groupe définissable générique de $F^\circ(B_1)^{-i_1}$ qui est de degré 1 d'après le Fait 5.2.2. Notamment $C^\circ(i_1)$ normalise K_1, et $K_1 \rtimes C^\circ(i_1)$ est un sous-groupe définissable générique de B_1. Ce dernier étant connexe, on a $B_1 = K_1 \rtimes C^\circ(i_1)$.

Enfin, $K_1 \leq [\Sigma, i_1] \leq H'$ qui est un groupe (∞, s)-homogène d'après le Lemme 5.2.29. En particulier K_1 est un (∞, s)-sous-groupe de $F^\circ(B_1)$, et donc inclus dans $F_s(B_1)$. Le Fait 1.8.33 (6) force l'unicité dans l'inclusion $C^\circ(K_1) \leq B_1$. □

Lemme 5.2.36 *Si i_i et i_2 sont G-conjuguées, alors i_2 inverse K_1.*

Preuve

On considère $X = C_{K_1}^\circ(i_2)$ supposé non-trivial, et disons $i_2 = i_1^g$ pour un $g \in G$. Alors X est inclus dans $C^\circ(i_2) \leq B_1^g$. En outre i_2 inverse $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ et centralise $U_{\tilde{q}_1}(B_1^g)$ d'après le Lemme 5.2.17. Mais i_1 inverse K_1 donc elle inverse aussi X, et ainsi le Lemme 5.2.2 appliqué dans B_1^g donne $X \leq F^\circ(B_1^g)$. En particulier $U_{\tilde{q}_1}(B_1^g) \leq C^\circ(X)$. Mais d'après la Proposition 5.2.35, $C^\circ(X) \leq B_1$, et ainsi $U_{\tilde{q}_1}(B_1^g) \leq B_1$. Le Lemme 1.9.1 force alors $B_1^g = B_1$. L'involution i_2 centralise et inverse $U_{\tilde{q}_1}(B_1) = U_{\tilde{q}_1}(B^g)$, une contradiction. □

Corollaire 5.2.37 (cf. Corollaire 3.3.4) $i_1^G \cap S = \{i_1\}$.

Preuve

En effet, d'après le Corollaire 5.1.7, il y a une ou trois classes d'involutions. S'il y en a une seule, le Lemme 5.2.36 appliqué avec i_2 puis avec i_3 impose que i_1 centralise K_1, contre sa définition. □

Le contrôle de la classe de i_1 dans le Corollaire 5.2.37 est indispensable aux arguments de conjugaison sur lesquels s'appuie la combinatoire de la sous-section suivante. Sans un tel résultat, les calculs de rang sont impossibles. Sa preuve n'en avait pas été différée pour entretenir le suspense ; le Corollaire 5.2.37 nécessite le Lemme 5.2.36 et nous semble inaccessible plus tôt dans la preuve.

Corollaire 5.2.38 $N(B_1) = B_1$.

Preuve

Un argument de Frattini donne $N(B_1) = N_{N(B_1)}(Q) \cdot B_1$, mais d'après le Corollaire 5.1.6, $N(Q) = Q$. □

5.2.5 La correspondance $K_1 \sim \tau_1$ et la contradiction à la simplicité

Lemme 5.2.39 (cf. Proposition 3.3.38) *Il existe un (∞, s)-sous-groupe de Sylow L de $C^\circ(\tau_1[w_1])$ tel que $U_{(\infty,s)}(O(L)) = U_{(\infty,s)}(O(\Sigma))$.*

Preuve

Soit $X = U_{(\infty,s)}(O(F_s(B_M)))$. Alors X est un (∞, s)-groupe par définition ; d'autre part il est non-trivial. En effet grâce aux Lemmes 5.2.33 et 1.10.4 et au Corollaire 5.2.30, $F_s(B_M) \geq \tau_1[w_1]$ qui n'a pas d'involution d'après le Lemme 5.2.19, et donc d'après le Fait 4.1.1, $O(F_s(B_M)) \geq \tau_1[w_1]$. Comme ce dernier est (∞, s)-homogène, on a $X \geq \tau_1[w_1]$. On prouve de même que $K_1 \leq X$.

Nous montrerons que $C^\circ_X(\tau_1[w_1]) \leq \Sigma$. Comme $i_1 \in B_M$ normalise X qui est $2^\perp$ et connexe par définition, on a d'après le Fait 1.3.2 la décomposition univoque $X = C_X(i_1) \cdot X^{-i_1}$, où chaque terme est de degré 1. Mais alors $C_X(i_1) = C^\circ_X(i_1) \leq C^\circ(i_1) \leq B_1$, donc $C_X(i_1) \leq (B_1 \cap B_M)^\circ = H$. D'autre part, X étant un $U_{(\infty,s)}$-groupe sans involution, le Fait 1.8.21 entraîne que $C_X(i_1)$ est encore un $U_{(\infty,s)}$-groupe. Ainsi $C_X(i_1) \leq U_{(\infty,s)}(H) = \Sigma$ d'après la Notation 5.2.32.

Pour montrer que $C^\circ_X(\tau_1[w_1]) \leq \Sigma$, il suffit ainsi de montrer qu'un élément $z \in X^{-i_1}$ qui centralise $\tau_1[w_1]$ appartient à Σ. Soit donc $z \in C^\circ_X(\tau_1[w_1])$ tel que $z^{i_1} = z^{-1}$.

Pour chaque $t \in \tau_1[w_1]$, on a $[z, t] = 1$ et $[z^{i_1}, t] = 1$, donc $[z, t^{i_1}] = 1$. En particulier, z commute à $[t, i_1]$. Donc z centralise $[\tau_1[w_1], i_1]$ qui n'est pas trivial d'après le Lemme 5.2.25. D'autre part $[\tau_1[w_1], i_1] \leq [\Sigma, i_1] = K_1$ par définition de ce dernier. Maintenant d'après la Proposition 5.2.35 B_1 est l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(K_1)$, et donc à plus forte raison l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ([\tau_1[w_1], i_1])$. Comme ce dernier est normalisé par z, il vient $z \in N(B_1) = B_1$ d'après le Corollaire 5.2.38.

Ainsi $z \in B_1$ est inversé par i_1. Comme $z \in X \leq O(F_s(B_M))$, $d(z)$ est sans involution. D'après le Lemme 5.2.2, $z \in F^\circ(B_1)$. Ainsi $z \in F(B_1) \cap F(B_M) = F_s(B_1) \leq U_{(\infty,s)}(H) = \Sigma$ (on a utilisé le Fait 1.8.33 (6) pour la première égalité). Nous avons bien prouvé $C^\circ_X(\tau_1[w_1]) \leq \Sigma$.

Soit enfin $L \geq \Sigma$ un (∞, s)-sous-groupe de Sylow de $C^\circ(\tau_1[w_1])$. Le Lemme 1.10.3 force $L \leq B_M$. Mais d'après le Lemme 1.10.4 et le Corollaire 5.2.30, on a $L \leq F_s(B_M)$, et donc $U_{(\infty,s)}(O(L)) \leq X$. Ainsi $U_{(\infty,s)}(O(L)) \leq C^\circ_X(\tau_1[w_1]) \leq \Sigma$. D'autre part, le Fait 4.1.1 implique $O(\Sigma) \leq O(L)$ et donc $U_{(\infty,s)}(O(\Sigma)) \leq U_{(\infty,s)}(O(L))$, ce qui entraîne l'égalité. Le lemme est démontré. □

Remarque 5.2.40 *Noter que Σ pouvant contenir un 2-tore central, il faut bien travailler avec des O partout ; puis pour être sûr d'avoir des (∞, s)-sous-groupes de Sylow, reprendre la partie (∞, s)-engendrée ! Peut-être le sous-groupe obtenu est-il propre dans Σ, l'essentiel est qu'il contienne les deux "blocs" qui nous intéressent, à savoir K_1 et $\tau_1[w_1]$.*

Notation 5.2.41 *Soit $\check{\Sigma} = U_{(\infty,s)}(O(\Sigma))$. (De manière analogue au début de la preuve du Lemme 5.2.39, $\check{\Sigma}$ contient $\tau_1[w_1]$ et K_1).*

Corollaire 5.2.42 *Il existe une involution w' conjuguée sous $C^\circ(\tau_1[w_1])$ à w_1 qui normalise $\check{\Sigma}$.*

Preuve
Soit L comme dans le Lemme 5.2.39. D'après le Corollaire 2.1.6, il existe une involution w' conjuguée sous $C^\circ(\tau_1[w_1])$ à w_1 qui normalise L. En particulier w' normalise $\check{\Sigma}$. □

Corollaire 5.2.43 (cf. Lemme 3.3.39) *$\forall w_1 \in I_1$, $\exists g \in G$ tel que $\tau_1[w_1] = K_1^g$.*

Preuve
Soit comme dans le Corollaire 5.2.42 une involution w' conjuguée sous $C^\circ(\tau_1[w_1])$ à w_1 et qui normalise $\check{\Sigma}$. Notamment w' inverse $\tau_1[w_1]$, c'est une G-conjuguée de i_1, et elle n'est pas dans B_1 d'après le Lemme 5.2.25. Ainsi $w' \in I_1$ par définition de ce dernier (Notation 5.2.3). En particulier tout ce qui précède est encore vrai pour w'. L'inclusion de sous-groupes de même rang $\tau_1[w'] \geq \tau_1[w_1]$ se transforme en égalité, et $\check{\Sigma}^{-w'} = \tau_1[w'] = \tau_1[w_1]$.

Maintenant $V \leq H \leq N(\check{\Sigma})$, donc d'après le Corollaire 5.1.2, $w' \in N(\check{\Sigma})$ est conjuguée dans $N(\check{\Sigma})$ à une involution de V. Ce ne peut être que i_1 au vu du Corollaire 5.2.37. Il existe donc $g \in N(\check{\Sigma})$ tel que $w' = i_1^g$, et ainsi $\tau_1[w_1] = \check{\Sigma}^{-w'} = (\check{\Sigma}^{-i_1})^g \leq K_1^g$, puis l'égalité des rangs prouve l'égalité de ces groupes connexes. □

Proposition 5.2.44 (cf. Corollaires 3.3.42 et 3.3.43)

$$\mathrm{rg}\left(K_1^G\right) = \mathrm{rg}\left(\bigcup_{w_1 \in I_1} \tau_1[w_1]\right).$$

Preuve
D'après la Proposition 5.2.35, B_1 est l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ(K_1)$. En particulier, si $x \in (K_1 \cap K_1^g)^\#$, alors $B_1 = B_1^g$, et il suit que $K_1 = K_1^g$. Le groupe K_1 est donc disjoint de ses conjugués non-identiques. En particulier, $\mathrm{rg}(K_1^G) = \mathrm{rg}(K_1) + \mathrm{rg}(G) - \mathrm{rg}(N(K_1))$. Mais toujours d'après la Proposition 5.2.35, $N^\circ(K_1) = B_1 = K_1 \rtimes C^\circ(i_1)$, donc il vient que $\mathrm{rg}(K_1^G) = \mathrm{rg}(G) - \mathrm{rg}(C^\circ(i_1)) = \mathrm{rg}(I_1)$.

Nous évaluons désormais le deuxième membre de l'égalité. Soient $w_0, w_1 \in I_1$. Comme $\tau_1[w_0]$ et $\tau_1[w_1]$ sont d'après le Corollaire 5.2.43 des conjugués de K_1, ils sont disjoints ou égaux. On suppose donc $\tau_1[w_1] = \tau_1[w_0] = K_1^g$ pour un $g \in G$. Alors w_0 et w_1 sont dans $I(N(K_1^g)) = I(N(B_1^g)) \subset B_1^g$ grâce au Corollaire 5.2.38. Comme i_1 est isolée dans S, on a que w_1 et w_0 sont toutes deux B_1^g-conjuguées à i_1^g, donc entre elles. D'après la décomposition donnée dans la Proposition 5.2.35, w_0 et w_1 sont même $K_1^g = \tau_1[w_0]$-conjuguées.

Quand nous calculons $\mathrm{rg}(\bigcup_{w_1 \in I_1} \tau_1[w_1])$, chaque terme est de rang $\mathrm{rg}(K_1)$, et la somme porte sur un ensemble de rang $\mathrm{rg}(I_1)$ modulo une équivalence dont les classes sont encore de rang $\mathrm{rg}(K_1)$. Il est donc clair que $\mathrm{rg}\left(\bigcup_{w_1 \in I_1} \tau_1[w_1]\right) = \mathrm{rg}(I_1)$. □

Preuve du Théorème 5.2.1
L'ensemble $\bigcup_{w_1 \in I_1} \tau_1[w_1]$ est inclus dans K_1^G d'après le Corollaire 5.2.43 ; il y est générique d'après la Proposition 5.2.44. En particulier, $B_1 \cap K_1^G$ est générique dans K_1^G, et le Corollaire 1.2.2 contredit la simplicité de G. □

Rapportons en trophée de cette coûteuse campagne un sous-groupe qui s'avèrera fort utile.

5.2.6 Conséquences - Y_1

Nous noterons encore $B_1 = C^\circ(i_1)$; c'est un sous-groupe de Borel. Tout est à refaire, même la distinction de B_1 d'avec B_2 et B_3 ! Enfin rappelons qu'à ce stade, aucune hypothèse ne distingue encore i_2 d'i_3 (c'est-à-dire $\tilde{q}_2$ de $\tilde{q}_3$) : on s'en souviendra dans les preuves qui suivent.

Pour étudier aisément l'action de V sur $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$, il faut pouvoir soutenir que le centralisateur de i_2 (et i_3) dans ce sous-groupe est encore un $\tilde{q}_1$-groupe. Le Fait 1.8.21 exige l'absence d'involutions, ce que nous ne savons plus garantir ; on travaillera donc plutôt avec de la $\tilde{q}_1$-homogénéité et le Fait 1.8.26. Ceci explique l'apparent détour qu'est l'introduction de U_1.

Notation 5.2.45 *Soit $U_1 = [U_{\tilde{q}_1}(B_1), B_1]$.*

Lemme 5.2.46 *U_1 est un $\tilde{q}_1$-sous-groupe définissable, homogène, non-trivial, et normal dans B_1.*

Preuve

U_1 est trivialement normal et définissable. Sa $\tilde{q}_1$-homogénéité résulte du Fait 1.8.26 (en caractéristique finie, c'est évident). Il reste à voir que U_1 est non-trivial. Si $U_1 = 1$, alors $U_{\tilde{q}_1}(B_1) \leq Z(B_1)$, et notamment $U_{\tilde{q}_1}(B_1) \leq C^\circ(V)$. Le choix de $\tilde{q}_1$ (voir Notation 5.1.13) impose alors $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2$, et $U_{\tilde{q}_1}(B_1) \leq B_2$, donc $U_{\tilde{q}_1}(B_1) = U_{\tilde{q}_1}(B_2)$. En particulier, le Lemme 1.9.1 entraîne $B_2 = B_1$, et l'on montre de même $B_3 = B_1$, une contradiction au Lemme 5.1.3. □

Le sous-groupe suivant est le trophée. Nous établirons ses propriétés dans la Proposition 5.2.57 qui clôt la section.

Notation 5.2.47 *Soit Y_1 un sous-groupe B_1-minimal de U_1.*

Il est immédiat d'après le Lemme 5.2.46 que Y_1 est un $\tilde{q}_1$-sous-groupe de B_1. En particulier, on pourra appliquer le Lemme 1.9.1 avec Y_1 dans les deux rôles (ou le Lemme 1.8.5, mais les configurations à unipotence de torsion doivent sembler bien fades au lecteur arrivé jusqu'ici). Rappelons que par B_1-minimalité, Y_1 est inclus dans $Z(F^\circ(B_1))$.

Lemme 5.2.48 *Si $B_2 \neq B_1$, alors i_2 inverse Y_1.*

Preuve

Si i_2 n'inverse pas U_1, alors $X = C^\circ_{Y_1}(i_2)$ est non-trivial. Mais comme $B_1 = C_{B_1}(i_2) \cdot F^\circ(B_1)$ et que Y_1 est inclus dans $Z(F^\circ(B_1))$, on a $X \lhd B_1$. Par B_1-minimalité de Y_1, il vient $X = Y_1$ et donc i_2 centralise Y_1.

En particulier $Y_1 \leq B_2$, mais puisque $\tilde{q}_1 \geq \tilde{q}_2$, on a égalité. Le Lemme 1.9.1 entraîne $B_2 = B_1$. □

Nous allons maintenant rendre B_1 distinct de B_2 et B_3. La preuve va occuper quelques lemmes ; elle est absolument similaire à celle de la Proposition 5.2.5.

Proposition 5.2.49 *$B_1 \neq B_2$ et $B_1 \neq B_3$.*

On suppose $B_1 = B_2$, et l'on montre une contradiction. D'après le Lemme 5.1.3, on a $B_3 \neq B_1$; d'après le Lemme 5.2.48 appliqué à B_3 et i_3, il vient que i_3 inverse Y_1. Comme i_1 le centralise, i_2 inverse Y_1. Comme $Y_1 \leq Z(F^\circ(B_1))$, on a le résultat suivant.

Lemme 5.2.50 *Toute involution de B_1 distincte de i_1 inverse Y_1.*

Lemme 5.2.51 *$B_1 = C^\circ(i_1) > C^\circ(i_2)$. En particulier i_1 et i_2 ne sont pas G-conjuguées.*

Preuve

On a par hypothèse $C^\circ(i_2) \leq B_2 = B_1$, mais $Y_1 \not\leq C^\circ(i_2)$. En particulier $C^\circ(i_2) < B_1$, et $C^\circ(i_2)$ n'est pas un sous-groupe de Borel. Notamment i_1 et i_2 ne sont pas G-conjuguées. □

Notation 5.2.52 *Soit pour chaque $w_2 \in i_2^G$ l'ensemble définissable $T_1[w_2] = \{b \in B_1,\ b^{w_2} = b^{-1}\}$.*

Lemme 5.2.53 *Il existe une involution $w_2 \in i_2^G \setminus N(B_1)$ telle que $\mathrm{rg}(T_1[w_2]) \geq \mathrm{rg}((F^\circ(B_1))^{-i_2})$.*

Notation 5.2.54 *Nous fixons une telle involution w_2.*

Lemme 5.2.55 *Aucun sous-groupe propre définissable, connexe, et w_2-invariant ne contient Y_1.*

Preuve

Soient H comme dans l'énoncé et $\tilde{q}$ un paramètre d'unipotence maximal pour H. Si $\tilde{q} = \tilde{q}_1$, alors $Y_1 \leq U_{\tilde{q}}(H)$. Pourtant d'après le Lemme 1.9.1 (ou 1.8.5), $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ est l'unique $\tilde{q}_1$-sous-groupe de Sylow de B_1 contenant Y_1. En particulier, il vient $w_2 \in N(B_1)$, une contradiction.

Ainsi $\tilde{q} > \tilde{q}_1$, et w_2 inverse $U_{\tilde{q}}(H)$ d'après le Lemme 5.1.15. Maintenant il existe dans H un $\tilde{q}_1$-sous-groupe de Sylow $\hat{U}_1$ contenant Y_1. D'après le Corollaire 2.1.6, il existe une involution w_2' conjuguée à w_2 sous H et qui normalise $\hat{U}_1$. Toujours d'après le Lemme 1.9.1 (resp. Lemme 1.8.5) puis par cotoricité, il vient $w_2' \in B_1$. Il est clair que $w_2' \neq i_1$ d'après le Lemme 5.2.51. En particulier, w_2' inverse Y_1 d'après le Lemme 5.2.50 ; maintenant le Lemme 1.3.1 force $[Y_1, U_{\tilde{q}}(H)] = 1$, d'où $U_{\tilde{q}}(H) \leq N^\circ(Y_1) = B_1$, une contradiction. □

Corollaire 5.2.56 *$T_1[w_2]$ est un groupe abélien définissable, et $C^\circ_{T_1[w_2]}(Y_1) = 1$.*

Preuve

On forme d'abord $X = F^\circ(B_1) \cap F^\circ(B_1)^{w_2}$. S'il est non-trivial, le Lemme 5.2.55 appliqué avec $H = N^\circ(X)$ donne une contradiction. Ainsi $X = 1$, et en particulier $B_1 \cap B_1^{w_2}$ est abélien.

On forme ensuite $X = C^\circ_{T_1[w_2]}(Y_1)$ que l'on suppose non-trivial, et l'on forme son normalisateur $H = N^\circ(X)$. Même contradiction. □

Preuve de la Proposition 5.2.49

Après des vérifications triviales, le théorème du corps (Fait 1.6.1) donne un corps algébriquement clos K tel que $Y_1 \simeq K_+$ et qu'un quotient fini de $T_1[w_2]$ se plonge dans $K^\times$. Par choix de w_2, on a pourtant $\mathrm{rg}(T_1[w_2]) \geq \mathrm{rg}(F^\circ(B_1)^{-i_2}) \geq \mathrm{rg}(Y_1) = \mathrm{rg}(K_+)$, donc $T_1[w_2]$ se surjecte sur $K^\times$. En particulier il contient un 2-tore non-trivial, qui est inversé par w_2. Ceci contredit la structure des 2-sous-groupes de Sylow (Corollaire 5.1.2). Ainsi $B_1 \neq B_2$. En l'absence d'hypothèse distinguant i_2 et i_3, on a aussi montré $B_1 \neq B_3$. □

Nous récoltons enfin les fruits de cette étude.

Proposition 5.2.57 *Y_1 est un $\tilde{q}_1$-groupe définissable, homogène, non-trivial, et normal dans B_1. Il est inversé par chaque involution de B_1 distincte de i_1. (En particulier il est $2^\perp$).*

Preuve

Evident d'après le Lemme 5.2.48 et la Proposition 5.2.49. □

Pour ne pas finir cette section sur une note optimiste, avouons que nous ne savons pas à ce point si B_2 et B_3 sont nécessairement distincts !

5.3 La campagne du deuxième centralisateur

Nous menons à présent la seconde grande bataille de cette étude. Attention, nous brisons la symétrie qui restait.

Notation 5.3.1 *On suppose désormais*

$$\tilde{q}_2 \geq \tilde{q}_3.$$

Nous introduisons, suite au Lemme 5.1.15, un deuxième principe contrôlant l'action des involutions sur l'unipotence. Faisons noter que le Lemme 5.3.2 est indépendant du fait que $C^\circ(i_2)$ soit un sous-groupe de Borel ou non.

Lemme 5.3.2 (cf. Lemme 5.1.15) *Soient B_0 un sous-groupe de Borel et $\tilde{q}_0$ un paramètre d'unipotence maximal pour B_0. On suppose $\tilde{q}_0 > \tilde{q}_2$. Alors il existe un $\tilde{q}_0$-sous-groupe définissable Y_0 normal dans B_0 et central dans $F^\circ(B_0)$ tel que toute involution de $N(B_0) \setminus i_1^G$ inverse Y_0.*

Preuve
Soit $k \in N(B_0) \setminus i_1^G$: nous montrons qu'elle inverse un sous-groupe conforme à l'énoncé, et dont la définition n'implique pas k.

On suppose d'abord que $F^\circ(B_0)$ n'a pas d'involution. Alors d'après le Fait 1.8.21, $C_{U_{\tilde{q}_0}(B_0)}(k)$ est un $\tilde{q}_0$-groupe, avec $\tilde{q}_0 > \tilde{q}_2 \geq \tilde{q}_3$. On a donc $C_{U_{\tilde{q}_0}(B_0)}(k) = 1$, et k inverse $U_{\tilde{q}_0}(B_0)$, donc inverse aussi $Y_0 = U_{\tilde{q}_0}(Z(F^\circ(B_0)))$. Y_0 convient bien, et ne dépend pas de k (prise dans $N(B_0) \setminus i_1^G$).

On suppose à présent que $F^\circ(B_0)$ a une involution ℓ. Alors $B_0 = C^\circ(\ell)$ admet le paramètre d'unipotence $\tilde{q}_0$, donc il vient $\ell \in i_1^G$. Ainsi à conjugaison près $B_0 = C^\circ(i_1) = B_1$ d'après le Théorème 5.2.1. Maintenant d'après la Proposition 5.2.57, chaque involution de $N(B_1) \setminus i_1^G$ inverse Y_1, et donc $Y_0 = Y_1$ convient. $\square$

Le contrôle d'unipotence connaîtra un dernier visage dans le Lemme 5.4.8 infra. L'enjeu est désormais de prouver que $C^\circ(i_2)$ aussi est un sous-groupe de Borel.

Théorème 5.3.3 *$C^\circ(i_2)$ est un sous-groupe de Borel.*

Dans un premier cas, les trois involutions sont conjuguées, et le Théorème 5.3.3 est immédiat grâce au Théorème 5.2.1. Dans un deuxième cas, il y a plus de travail !

Nous supposons $C^\circ(i_2) < B_2$.

Au vu du Corollaire 5.1.7, il y a trois classes de conjugaison d'involutions. Nous allons bien sûr consacrer une attention spéciale à celle de i_2 dans cette étude qui imite assez identiquement la Section 5.2 de ce chapitre, et plus fidèlement encore la Section 3.3 du chapitre 3. La seule différence est lors du contrôle de la torsion des ensembles $T_2[w_2]$, qui requerra un soin particulier.

Il est évident d'après la structure du 2-sous-groupe de Sylow (Corollaire 5.1.2) et l'hypothèse qu'il y a trois classes, que deux involutions distinctes et conjuguées ne peuvent pas commuter. Dans la suite, nous affublerons chaque involution d'un indice qui signalera sa classe de conjugaison : s_1 sera toujours une G-conjuguée de i_1, etc.

Lemme 5.3.4 (cf. Lemmes 3.1.2 et 5.2.2) *Quitte à échanger i_2 et i_3, on peut supposer que $F^\circ(B_2)$ est $2^\perp$; d'où la décomposition usuelle, &c.*

5.3.1 Introduction et réduction des pseudo-tores

Notation 5.3.5 *Soient pour chaque $w_2 \in i_2^G$ l'ensemble définissable*

$$T_2[w_2] = \left\{b \in B_2,\ b^{w_2} = b^{-1}\right\}$$

$$\text{et } I_2 = \left\{w_2 \in i_2^G \setminus N(B_2),\ \operatorname{rg}(T_2[w_2]) \geq \operatorname{rg}\left((F^\circ(B_2))^{-i_2}\right)\right\}.$$

Lemme 5.3.6 *I_2 est un sous-ensemble (définissable) générique de i_2^G.*

Notation 5.3.7 *Nous fixons jusqu'à nouvel ordre une involution w_2 de I_2.*

Lemme 5.3.8 *Les éventuels éléments de torsion de $T_2[w_2]$ sont des involutions toutes G-conjuguées entre elles ; leur classe n'est pas celle de i_2.*

Preuve
Soit $t \in T_2[w_2]$ un p-élément. Comme au début de la preuve du Lemme 3.3.9, on montre que B_2 est sans p-unipotence. En effet, grâce au Fait 1.4.3, on trouve sinon que $C^\circ_{U_p(B_2)}(t)$ est infini, et ce sous-groupe p-unipotent est commun à B_2 et $B_2^{w_2}$, contradiction au Lemme 1.8.5. L'élément t appartient donc à un p-tore P de B_2, et l'on poursuit comme dans le Lemme 5.2.19 : $C^\circ(P)$ contient un 2-tore maximal S_1°, et w_2 normalise $C^\circ(t) \geq C^\circ(P) \geq S_1^\circ$ d'où par cotoricité, $w_2 \in C^\circ(t)$.

La torsion de $T_2[w_2]$ est donc formée d'involutions. Que ce ne soit pas des conjuguées de i_2 est clair. Reste à supposer qu'il existe dans $T_2[w_2]$ des involutions j_1 et ℓ_3 qui soient G-conjuguées l'une à i_1 et l'autre à i_3. Mais alors $d(j_1\ell_3)$ doit contenir une involution, qui ne peut être que

G-conjuguée à i_2 ; appelons-la k_2. En particulier, $[w_2, k_2] = 1$ et donc $w_2 = k_2 \in d(j_1\ell_3) \leq B_2$, une contradiction. $\square$

Le mot d'ordre dans les deux lemmes suivant est d'exporter le seul merveilleux sous-groupe disponible, à savoir Y_1 de la Notation 5.2.47. Nous rappelons par ailleurs que deux involutions de B_2 conjuguées (dans B_2 ou dans G, cela revient au même) ont même action sur $Z(F^\circ(B_2))$.

Lemme 5.3.9 ("Birthday Lemma" 1) *Il y a au plus une G-conjuguée de i_1 dans $T_2[w_2]$.*

Preuve

On suppose qu'il y en a deux : disons $j_1 \neq j_1' \in T_2[w_2]$. Soit $\ell_3 = j_1 w_2$.

Montrons que $d(j_1j_1')$ est connexe. Supposons d'abord qu'il existe dans $d(j_1j_1')$ une involution ; elle ne peut être que G-conjuguée à i_3 ; appelons-la s_3. Alors $[w_2, j_1] = [j_1, s_3] = [s_3, w_2] = 1$, ce qui force $w_2 = j_1 s_3 \in B_2$, une absurdité. Ainsi $d(j_1j_1')$ est sans involution. Maintenant s'il existe dans $d(j_1j_1')$ un p-élément x, alors on élimine la p-unipotence comme dans le Lemme 5.3.8, et on en déduit que $C^\circ(x)$ contient un 2-tore maximal de G. Comme $C^\circ(x)$ est normalisé par j_1, il vient par cotoricité $j_1 \in C^\circ(x)$, donc x est une involution, contradiction. Ainsi $d(j_1j_1')$ est-il connexe.

Le groupe $C^\circ(j_1j_1')$ est non-trivial, propre, définissable, connexe, et $\langle j_1, w_2\rangle$-invariant ; gâce au Théorème 4.3.4, on l'inclut dans un sous-groupe de Borel B_0 encore $\langle j_1, w_2\rangle$-invariant (et donc également ℓ_3-invariant) ; soit $\tilde{q}_0$ un paramètre d'unipotence maximal pour B_0. D'après le Corollaire 5.1.16, $\tilde{q}_0 \leq \tilde{q}_1$. Comme j_1 et j_1' ont même action sur $U_{\tilde{q}_2}(Z(F^\circ(B_2)))$, on a d'autre part $\tilde{q}_0 \geq \tilde{q}_2$.

Si $\tilde{q}_0 = \tilde{q}_2$, alors $U_{\tilde{q}_2}(Z(F^\circ(B_2))) \leq U_{\tilde{q}_2}(Z(F^\circ(B_0)))$, et le Lemme 1.9.1 impose $B_0 = B_2$. En particulier, w_2 normalise B_2, une contradiction. Ainsi $\tilde{q}_0 > \tilde{q}_2$.

D'après le Lemme 5.3.2, il existe dans B_0 un $\tilde{q}_0$-sous-groupe Y_0 normal dans B_0 et inversé par w_2 et ℓ_3. En particulier, Y_0 est centralisé par j_1 et donc $Y_0 \leq C^\circ(j_1)$. Maintenant si l'on écrit $j_1 = i_1^g$, il vient d'après la Proposition 5.2.57 que $Y_1^g \leq C^\circ(j_1)$ est lui aussi inversé par w_2. Le Lemme 1.3.1 force $[Y_0, Y_1^g] = 1$. En particulier $Y_1^g \leq N^\circ(Y_0) = B_0$, donc $\tilde{q}_0 = \tilde{q}_1$ et $Y_1^g \leq U_{\tilde{q}_1}(B_0)$. Le Lemme 1.9.1 entraîne $B_0 = B_1^g = C(j_1)$.

Ainsi a-t-on $C^\circ(j_1j_1') \leq B_0 = C(j_1)$; en particulier $j_1j_1' \in d^\circ(j_1j_1') \leq C^\circ(j_1j_1') \leq C(j_1)$, donc j_1 centralise et inverse j_1j_1' qui doit alors être une involution. Enfin $[j_1, j_1'] = 1$, une contradiction. $\square$

Lemme 5.3.10 ("Birthday Lemma" 2) *Il y a au plus une G-conjuguée de i_3 dans $T_2[w_2]$.*

Preuve

On suppose qu'il y en a deux : disons $\ell_3 \neq \ell_3' \in T_2[w_2]$. Comme précédemment, $d(\ell_3\ell_3')$ est connexe. L'involution $w_2\ell_3$ est une G-conjuguée de i_1, disons j_1.

On inclut désormais $C^\circ(\ell_3\ell_3')$ dans un sous-groupe de Borel $\langle w_2, \ell_3\rangle$-invariant que l'on appelle B_0, et l'on note $\tilde{q}_0$ un paramètre d'unipotence maximal pour B_0. Comme ℓ_3 et ℓ_3' ont même action sur $U_{\tilde{q}_2}(Z(F^\circ(B_2)))$, on a $U_{\tilde{q}_2}(Z(F^\circ(B_2))) \leq B_0$.

Si $\tilde{q}_0 = \tilde{q}_2$, il vient $B_0 = B_2$ et donc B_2 est w_2-invariant, une contradiction. Ainsi $\tilde{q}_0 > \tilde{q}_2$. D'après le Lemme 5.3.2, il existe un $\tilde{q}_0$-sous-groupe Y_0 normal dans B_0 et inversé par w_2 et ℓ_3. En particulier, $j_1 = w_2\ell_3$ centralise Y_0. Si l'on écrit $j_1 = i_1^g$, on trouve dans B_1^g l'involution w_2, qui inverse Y_0 et Y_1^g, et le premier normalise le second. Il vient ainsi $[Y_0, Y_1^g] = 1$, et donc $Y_1^g \leq N^\circ(Y_0) = B_0$. Le Lemme 1.9.1 impose $B_0 = B_1^g$.

On a donc $B_0 = C(j_1)$ et $C^\circ(\ell_3\ell_3') \leq C(j_1)$. Mais alors $\ell_3\ell_3' \in C(j_1)$, d'où $\ell_3 = j_1 w_2 \in C(\ell_3\ell_3')$. Ainsi $\ell_3\ell_3'$ est une involution, ce qui est une contradiction. $\square$

Corollaire 5.3.11 *$\tau_2[w_2]$ est un sous-ensemble générique de $T_2[w_2]$; la clôture définissable de chacun de ses éléments est sans torsion.*

Ces difficultés passées, nous travaillons avec la classe de i_2 sans nous soucier des deux autres, et la méthode de §3.3 se déroule sans encombre.

Lemme 5.3.12 (cf. Lemmes 3.3.11 et 5.2.25) *Aucune B_2-conjuguée de i_2 n'inverse $\tau_2[w_2]$. Si $t \in \tau_2[w_2]^\#$, aucune B_2-conjuguée de i_2 ne centralise t.*

Preuve
Celle du Lemme 5.2.25 convient. □

Proposition 5.3.13 (cf. Corollaire 3.3.14 et Lemme 5.2.21) *Il existe un entier $s \geq 1$ et un (∞, s)-sous-groupe abélien de $d(\tau_2[w_2])$ qui est inclus dans $\tau_2[w_2]$ et qui ne centralise pas $U_{\tilde{q}_2}(Z(F^\circ(B_2)))$.*

Preuve
Similaire à celle du Corollaire 3.3.14 (ce qui passe par le Corollaire 3.3.12 et le Lemme 3.3.13). □

Proposition 5.3.14 (cf. Propositions 3.3.17 et 5.2.23) *$B_2 \cap B_2^{w_2}$ est abélien.*

Preuve
Celle de la Proposition 3.3.17 (plutôt que celle de la Proposition 5.2.23) : on commence par poser $X = F^\circ(B_2) \cap F^\circ(B_2)^{w_2}$ et $N = N^\circ(X)$. Pourtant la preuve (surtout au moment du Corollaire 3.3.20) se modifie légèrement comme suit, pour pouvoir assurer un bon contrôle de l'action de w_2 sur les sous-groupes unipotents.

Grâce au Théorème 4.3.4 on inclut N dans un sous-groupe de Borel B_0 qui soit w_2-invariant, et l'on choisit un paramètre d'unipotence maximal $\tilde{q}_0$ pour B_0. Comme dans le Lemme 3.3.19, on établit $\tilde{q}_0 > \tilde{q}_2$.

On prouve ensuite (comme dans le Corollaire 3.3.20) que $Z(F^\circ(B_2)) \leq C(i_2)$. Pour cela on pose $X_2 = (Z(F^\circ(B_2)))^{-i_2}$, un sous-groupe normal inversé par chaque involution de $i_2^{B_2}$. Soit $\hat{U}_2$ un $\tilde{q}_2$-sous-groupe de Sylow de B_0 contenant $U_{\tilde{q}_2}(Z(F^\circ(B_2)))$. D'après le Corollaire 2.1.6, il existe une involution w_2' conjuguée sous B_0 à w_2 et qui normalise $\hat{U}_2$. En particulier le Lemme 1.9.1 impose $w_2' \in B_2$, où elle est conjuguée à i_2. Maintenant (et c'est la seule différence), le Lemme 5.3.2 impose dans B_0 l'existence d'un $\tilde{q}_0$-sous-groupe $Y_0 \neq 1$ normal dans B_0, et inversé par w_2'. Il vient alors $[X_2, Y_0] = 1$, et donc $Y_0 \leq B_2$, une contradiction. C'est ainsi que nous prouvons $Z(F^\circ(B_2)) \leq C(i_2)$.

Le reste de la preuve de la Proposition 3.3.17 n'utilisait pas d'unipotence graduée, et nous pouvons conclure à l'identique. □

5.3.2 Intersection maximale et concentration

Le lecteur ne doit pas s'inquiéter des classes i_1^G et i_3^G : la preuve du Théorème 5.3.3 imitera fidèlement désormais celle du Théorème 5.2.1. D'ailleurs il a bien vu comment dans la preuve de la Proposition 5.3.14, le Lemme 5.3.2 nous tirait d'embarras. La question de la "hiérarchie" des involutions n'intervient plus.

Notation 5.3.15 *Soit $B_M \geq C^\circ_{B_2}(\tau_2[w_2])$ un sous-groupe de Borel distinct de B_2 et maximisant $H = (B_2 \cap B_M)^\circ$ parmi de telles intersections. (L'existence est comme dans le Lemme précédant la Notation 5.2.27.)*

Proposition 5.3.16 (cf. Propositions 3.3.25 et 5.2.28) *H_M n'est pas abélien.*

Preuve
Nihil novi sub sole. □

Proposition 5.3.17 (cf. Lemmes 3.3.26, 3.3.27 et 5.2.29) *$d_\infty(H_M') = s$ et $\tilde{q}_M < \tilde{q}_2$.*

Preuve
Semper eadem. □

Corollaire 5.3.18 (cf. Lemme 3.3.29 et Corollaire 5.2.30) *(On peut à conjugaison près supposer que) Q est un sous-groupe de Carter de B_2 et de B_M.*

Notation 5.3.19 (cf. Notations 3.3.31, 5.2.32, et 5.2.41) *Soient* $\Sigma_2 = U_{(\infty,s)}(H) = F_s(H)$ *et* $\check{\Sigma}_2 = U_{(\infty,s)}(O(\Sigma_2))$.

Lemme 5.3.20 (cf. Lemmes 3.3.32 et 5.2.33) Σ_2 *est un* (∞, s)*-sous-groupe de Sylow abélien de* B_2. *Il contient* $\tau_2[w_2]$ *qui est* (∞, s)*-homogène.*

Preuve

Celle du Lemme 5.2.33 plutôt que celle du Lemme 3.3.32. □

Notation 5.3.21 (cf. Notations 3.3.33 et 5.2.34) *Soit* $K_2 = [\Sigma_2, i_2]$.

Proposition 5.3.22 (cf. Lemme 3.3.34 et Proposition 5.2.35) K_2 *ne dépend pas de* i_2*, ni de* w_2. *C'est un* (∞, s)*-groupe abélien homogène et sans involution, de même rang que* $\tau_2[w_2]$. *Enfin* $B_2 = K_2 \rtimes C^\circ(i_2)$ *et* B_2 *est l'unique sous-groupe de Borel contenant* $C^\circ(K_2)$.

Preuve

Celle de la Proposition 5.2.35 plutôt que celle du Lemme 3.3.34. □

Proposition 5.3.23 (cf. Lemme 5.2.39) $\check{\Sigma}_2$ *contient* $\tau_2[w_2]$ *ainsi que* K_2. *En outre il existe un* (∞, s)*-sous-groupe de Sylow* L *de* $C^\circ(\tau_2[w_2])$ *tel que* $U_{(\infty,s)}(O(L)) = \check{\Sigma}_2$.

Preuve

Celle du Lemme 5.2.39 (relire aussi la remarque suivant ledit lemme). □

Preuve du Théorème 5.3.3

Comme il y a trois classes de conjugaison d'involutions, la combinatoire mise en place par le Corollaire 5.2.43 est aisément vérifiée : on ne travaille en effet qu'avec les involutions de i_2^G. En particulier on peut concentrer génériquement les conjugués de K_2^g dans B_2, et cætera. Contradiction à la simplicité. □

Le lecteur peut se demander ce qui fait donc marcher la preuve, alors que $\tilde{q}_2$ n'est pas forcément "si" unipotent. La réponse est sans doute à chercher dans la Remarque faite après la Notation 3.1.5.

5.3.3 Conséquences - B_2 distinct de B_3

Les deux centralisateurs $C^\circ(i_1)$ et $C^\circ(i_2)$ sont des sous-groupes de Borel (B_1 et B_2), mais nous ne savons pas encore s'il en va de même de $C^\circ(i_3)$; à vrai dire nous ne savons toujours pas si B_3 est distinct de B_2 ! Voici enfin la réponse (heureusement positive).

Proposition 5.3.24 *Les trois sous-groupes de Borel sont distincts.*

Au vu de la Proposition 5.2.49, il suffit de prouver $B_2 \neq B_3$. Nous supposons donc $B_2 = B_3$, et prouvons une contradiction. Rappelons que d'après le Théorème 5.3.3, $C^\circ(i_2) = B_2$. En particulier grâce au Lemme 5.1.3, on a $C^\circ(i_3) < B_2$, et i_2 et i_3 ne sont donc pas G-conjuguées. D'après le Corollaire 5.1.7, il y a ainsi trois classes de conjugaison d'involutions.

La preuve de la Proposition 5.3.24 commence par un poncif.

Lemme 5.3.25 *Il existe une involution* $w_3 \in i_3^G \setminus B_2$ *telle que* $\mathrm{rg}(T_2[w_3]) \geq \mathrm{rg}((F^\circ(B_2))^{-i_3})$, *où* $T_2[w_3] = \{t \in B_2, t^{w_3} = t^{-1}\}$.

Notation 5.3.26 *Nous fixons une telle involution* w_3. *Comme* i_2 *et* w_3 *ne sont pas conjuguées, il existe dans* $d(i_2 w_3)$ *une involution, qui ne peut être que conjuguée à* i_1. *Nous la notons* j_1.

Lemme 5.3.27 *L'ensemble* τ *des carrés d'éléments de* $T_2[w_3]$ *est un sous-ensemble générique de* $T_2[w_3]$ *; en outre pour tout* t *de* τ*,* $d(t)$ *est sans torsion et inclus dans* τ.

Preuve

Nous démontrons qu'il y a dans $T_2[w_3]$ au plus un élément de torsion, qui se trouve être une involution ; cela prouvera le tout.

Soit $t \in T_2[w_3]$ un p-élément. B_2 est alors sans p-unipotence, car sinon d'après le Fait 1.4.3, $Z(U_p(B_2) \cdot \langle t \rangle)$ est infini, et notamment $C^\circ_{U_p(B_2)}(t) \neq 1$. Ce sous-groupe p-unipotent est inclus tant dans B_2 que dans $B_2^{w_3}$, et le Lemme 1.8.5 impose avec la cotoricité $w_3 \in B_2$, contradiction.

Ainsi t appartient-il à un p-tore de B_2, qui centralise d'après le Corollaire 1.5.4 un 2-tore S_1° maximal dans B_2, donc maximal dans G. Il vient $S_1^\circ \leq C^\circ(t)$ qui est w_3-invariant, donc par cotoricité, $w_3 \in C^\circ(t)$, et donc t est une involution.

Il est clair que t qui commute à w_3 ne peut lui être conjuguée. Elle ne saurait pas davantage être conjuguée à i_2, car sinon $t = i_2$ (seule involution de sa classe dans B_2), et $[w_3, i_2] = 1$, une contradiction. Ainsi $t \in i_1^G$.

Nous supposons à présent qu'il y a dans $T_2[w_3]$ *deux* involutions distinctes t_1 et t_1' (toutes deux conjuguées à i_1 d'après ce qui précède). Alors dans $C(t_1t_1')$, on trouve i_2 et w_3, et donc aussi j_1 (voir Notation 5.3.26). Mais d'après le Lemme 2.1.1, il existe une $C(t_1t_1')$-conjuguée de t_1 qui centralise j_1, et cela force $t_1 = j_1 \in C(t_1t_1')$. En particulier t_1t_1' est une involution, contradiction.

L'argument donnant la généricité de τ dans $T_2[w_3]$ est comme dans le Lemme 5.2.19. □

Lemme 5.3.28 *τ est un sous-groupe définissable, abélien, connexe, et inclus dans $F^\circ(B_2)$; de plus l'involution j_1 (Notation 5.3.26) l'inverse.*

Preuve

Soit $t \in \tau^\#$. Nous montrons que j_1 inverse t. En effet il est clair que j_1 normalise $d(t)$, qui n'a pas d'involution d'après le Lemme 5.3.27. Supposons donc que j_1 n'inverse pas t : alors il existe $s \in d(t)^\#$ tel que $s^{j_1} = s$. Maintenant $C(s)$ contient le Viergruppe $\langle j_1, i_2 \rangle$, mais il est w_3-invariant. D'après le Lemme 2.1.1 et par cotoricité, il vient $w_3 \in C(s)$. Mais w_3 inverse s, qui est donc une involution de $d(t) \subseteq \tau$, ce qui contredit le Lemme 5.3.27.

Ainsi j_1 inverse bien t (quelconque dans τ). Mais $j_1 \in C(i_2) = B_2$ et $d(t)$ est $2^\perp$, donc par un argument classique il vient $d(t) \leq F^\circ(B_2)$.

On a alors $\tau \subseteq F^\circ(B_2)$. Comme les éléments de τ ont leur clôture définissable connexe (toujours le Lemme 5.3.27), il vient $\tau \subseteq (F^\circ(B_2) \cap F^\circ(B_2)^{w_3})^\circ$, et d'après le Corollaire 1.8.34 ceci est un groupe abélien. Il en va donc de même de τ, qui est définissable. L'involution j_1 l'inverse. □

Preuve de la Proposition 5.3.24

Le sous-groupe τ est inclus dans $F^\circ(B_2)$; il est centralisé par i_2 et inversé par j_1. Soit $\ell_3 = j_1 i_2$, clairement conjuguée à i_3. On a alors par choix de w_3 que $\mathrm{rg}(\tau) \geq \mathrm{rg}((F^\circ(B_2))^{-i_3}) \geq \mathrm{rg}(\tau)$, donc τ est l'unique sous-groupe générique de l'ensemble $(F^\circ(B_2))^{-i_3}$. En particulier $C_{B_2}(i_3)$ le normalise et $\tau \rtimes C_{B_2}(i_3)$ est un sous-groupe générique de B_2. Il vient ainsi $B_2 = \tau \rtimes C_{B_2}(i_3) = N^\circ(\tau)$, donc w_3 normalise B_2, une contradiction qui achève la preuve de la Proposition 5.3.24. □

5.3.4 Conséquences - Y_2

Nous introduisons à présent un analogue dans B_2 du sous-groupe Y_1 de la Notation 5.2.47.

Notation 5.3.29 *Soit $U_2 = [U_{\tilde{q}_2}(B_2), B_2]$.*

Lemme 5.3.30 *U_2 est un sous-groupe non-trivial, définissable, $\tilde{q}_2$-homogène, et normal dans B_2.*

Preuve

La définissabilité et la normalité sont évidentes. La $\tilde{q}_2$-homogénéité résulte (si nécessaire) du Fait 1.8.26. Maintenant si U_2 est trivial, alors $U_{\tilde{q}_2}(B_2) \leq B_3$ et le Lemme 1.9.1 (ou le Lemme 1.8.5) avec $\tilde{q}_2 \geq \tilde{q}_3$ force $B_2 = B_3$, une contradiction. □

Notation 5.3.31 *Soit Y_2 un sous-groupe B_2-minimal de U_2.*

Proposition 5.3.32 *Y_2 est un sous-groupe définissable $\tilde{q}_2$ -homogène normal dans B_2 ; toutes les involutions de B_2 distinctes de i_2 l'inversent. (En particulier il est $2^\perp$).*

Preuve
Soit $X = C^\circ_{Y_2}(i_3)$. Si $X \neq 1$, alors par B_2-minimalité de Y_2 et le fait que X est encore normal dans B_2, on a $X = Y_2 \leq B_3$. En particulier le Lemme 1.9.1 (ou 1.8.5) force encore $B_2 = B_3$, une contradiction à la Proposition 5.3.24.

Ainsi $X = 1$, et i_3 inverse Y_2 que i_2 centralise ; donc i_1 inverse aussi. Comme $Y_2 \leq Z(F^\circ(B_2))$, il est clair que toutes les involutions de B_2 distinctes de i_2 inversent Y_2. □

5.4 Conjugaison des involutions

Dans cette section nous prouverons que les trois involutions sont conjuguées. Jusqu'au petit carré blanc suivant le Corollaire 5.4.12 infra, nous supposons qu'il existe deux involutions non-conjuguées. D'après le Corollaire 5.1.7, il y a exactement trois classes d'involutions.

Rappelons que chaque $C(i)$, où $i \in I(G)$, est alors connexe d'après le Fait 1.3.11. Commençons par deux principes.

Lemme 5.4.1 *Deux involutions distinctes et G-conjuguées ne peuvent commuter.*

Preuve
Evident d'après le Corollaire 5.1.2 et l'hypothèse que les classes sont distinctes. □

Lemme 5.4.2 *Si j et k sont deux involutions non-conjuguées, alors la clôture définissable $d(jk)$ contient une unique involution ℓ, qui représente la troisième classe de conjugaison.*

Preuve
Par cotoricité, $d(jk)$ inversé par j ne contient pas de 2-tore non-trivial. Comme j et k ne sont pas conjuguées, il n'est pourtant pas 2-divisible : soit donc ℓ l'unique involution de $d(jk)$. Il est clair d'après le Lemme 5.4.1 que ℓ n'est G-conjuguée ni à j ni à k. □

5.4.1 τ général

Nous revenons aux ensembles $T[w]$ et $\tau[w]$ (cf. Notations 5.2.3 et 5.2.18) avec une belle généralité.

Notation 5.4.3 *Soient k et ℓ deux involutions non-conjuguées et ne commutant pas. Soit $T_{C(\ell)}[k]$ l'ensemble $\{t \in C(\ell),\ t^k = t^{-1}\}$. Soit aussi $\tau_{C(\ell)}[k]$ l'ensemble des carrés des éléments de $T_{C(\ell)}[k]$.*

Attention, nous ne préjugeons rien du rang de ces ensembles : on va même montrer qu'ils sont triviaux ! D'autre part si pour $\ell \in i_1^G \sqcup i_2^G$ il est vrai que $C(\ell)$ est un sous-groupe de Borel, nous ne disposons (ni n'avons besoin) d'un tel résultat pour $\ell \in i_3^G$.

Proposition 5.4.4 (cf. Lemmes 5.2.19, 5.3.9 et 5.3.10) *Soient k et ℓ deux involutions non-conjuguées et ne commutant pas. On fixe un sous-groupe de Borel B_ℓ contenant $C(\ell)$, et l'on suppose $k \notin B_\ell$. Alors $\tau_{C(\ell)}[k]$ est un sous-ensemble générique de $T_{C(\ell)}[k]$, et si $t \in \tau_{C(\ell)}[k]^\#$, alors sa clôture définissable $d(t)$ est sans torsion.*

Preuve
Nous allons montrer que $T_{C(\ell)}[k]$ contient au plus un élément de torsion. Soit en effet $t \in T_{C(\ell)}[k]$ un p-élément. On exclut comme dans le Lemme 5.3.9 la p-unipotence de $C(\ell)$ (ceci utilise non seulement que $k \notin C(\ell)$, mais aussi $k \notin B_\ell$). Toujours comme dans le Lemme 5.3.9, l'élément t est alors dans un p-tore non-trivial P, et $C^\circ(P)$ contient un 2-tore maximal S_1° de G. Ainsi $S_1^\circ \leq C^\circ(P) \leq C^\circ(t)$ qui est k-invariant, ; avec le Lemme 2.1.1, on peut supposer que S_1° est k-invariant ; par cotoricité, $k \in S_1^\circ \leq C^\circ(t)$. En particulier, t est une involution.

Il est clair que cette involution n'est conjuguée ni à k, ni à ℓ ; nous noterons j les involutions de sa classe de conjugaison ; nous affirmons qu'il y a au plus une telle j dans $T_{C(\ell)}[k]$. Cela démontrera le tout, pourvu qu'on se reporte à la preuve du Lemme 5.2.19 pour conclure.

Soient donc j et j' deux involutions de $T_{C(\ell)}[k]$. On les suppose distinctes et l'on montre une contradiction. Comme on l'a dit, j et j' représentent la troisième G-classe de conjugaison. Maintenant $\ell \in C(jj')$, et aussi $k \in C(jj')$.

D'après le Lemme 5.4.2, il existe dans $d(k\ell) \leq C(jj')$ une involution $\hat{j}$, dont la G-classe est nécessairement celle de j et j'. Comme j normalise $C(jj')$, d'après le Lemme 2.1.1 il existe une involution $\check{j}$ conjuguée sous $C(jj')$ à j et qui centralise $\hat{j}$. D'après le Lemme 5.4.1, il vient $\check{j} = \hat{j}$. En particulier, $\hat{j}$ centralise et inverse jj', qui est donc une involution, d'où j et j' commutent. Cela contredit le Lemme 5.4.1.

Pour le reste nous renvoyons à la preuve du Lemme 5.2.19. Les techniques y développées prouvent que pour chaque $t \in \tau_{C(\ell)}[k]^{\#}$, la clôture définissable $d(t)$ est sans torsion, et la généricité de $\tau_{C(\ell)}[k]$ dans $T_{C(\ell)}[k]$ est établie à l'avenant. □

Corollaire 5.4.5 *Soient k et ℓ deux involutions non-conjuguées et ne commutant pas. On fixe un sous-groupe de Borel B_ℓ contenant $C(\ell)$, et l'on suppose $k \notin B_\ell$. Alors $\tau_{C(\ell)}[k]$ est un sous-groupe abélien définissable et connexe de $F^\circ(B_\ell)$. En outre l'unique involution de $d(k\ell)$ inverse $\tau_{C(\ell)}[k]$.*

Preuve

Nous noterons plus simplement $\tau = \tau_{C(\ell)}[k]$. L'affirmation est évidente si $\tau = 1$. On suppose donc $\tau \neq 1$; soit $t \in \tau^{\#}$. Alors $k, \ell \in N(d(t))$, et d'après le Lemme 5.4.2, il y a dans $d(k\ell) \leq N(d(t))$ une involution j représentant la troisième classe de conjugaison ; en outre $j \in C(\ell)$.

Nous considérons l'action de j sur $d(t)$ qui est abélien et sans involution d'après la Proposition 5.4.4. Supposons qu'il existe un élément $1 \neq s \in C_{d(t)}(j)$. Alors $\ell, j \in C(s)$, donc $k' = \ell j$ est une involution de $C(s)$, qui est nécessairement G-conjuguée à k. D'après le Lemme 2.1.1, k centralise une $C(s)$-conjuguée de k', et le Lemme 5.4.1 impose $k \in C(s)$. Comme k inverse $s \in \tau$, on a que s est une involution, une contradiction à la Proposition 5.4.4. Ainsi j inverse $d(t)$. Comme $d(t)$ est sans torsion et que $j \in C(\ell) \leq B_\ell$, le Lemme 1.7.4 et un calcul classique imposent $t \in F^\circ(B_\ell)$.

A ce point nous avons prouvé que l'ensemble τ est inclus dans $F^\circ(B_\ell)$. Comme il est également inclus dans $F^\circ(B_\ell)^k$, il est dans leur intersection, et d'après la Proposition 5.4.4 on a même que $\tau \subseteq (F^\circ(B_\ell) \cap F^\circ(B_\ell)^k)^\circ$. Maintenant d'après le Corollaire 1.8.34 et le fait que k ne normalise pas B_ℓ, le groupe $(F^\circ(B_\ell) \cap F^\circ(B_\ell)^k)^\circ$ est abélien, et donc τ aussi. Il est désormais clair que τ est un groupe abélien définissable et connexe. On a prouvé que l'involution j l'inverse. □

5.4.2 Finitude

Le Corollaire 5.4.5 a de remarquables conséquences. Nous renvoyons aux Notations 5.2.47 et 5.3.31, ainsi qu'aux Propositions 5.2.57 et 5.3.32 pour les sous-groupes Y_1, Y_2, et leurs propriétés.

Corollaire 5.4.6 *Soient $\ell \in i_1^G \sqcup i_2^G$ et $k \notin \ell^G$ deux involutions non-conjuguées et ne commutant pas. Alors $\tau_{C(\ell)}[k]$ est trivial.*

Preuve

Supposons qu'il existe une ℓ et une k démentant l'énoncé, et menons la configuration à la contradiction. D'après la Proposition 5.4.4 et le Corollaire 5.4.5, $\tau_{C(\ell)}[k]$ est un sous-groupe de $F^\circ(C(\ell))$; ici $B_\ell = C(\ell)$ d'après les Théorèmes 5.2.1 et 5.3.3. Nous noterons plus simplement $\tau = \tau_{C(\ell)}[k]$.

D'après le Lemme 5.4.2, il existe dans $d(k\ell)$ une involution représentant la classe manquante, et que nous notons j.

Soit $N = N^\circ(\tau)$. Ce groupe est $\langle j, k\rangle$-invariant, on l'inclut grâce au Théorème 4.3.4 dans un sous-groupe de Borel B_0 encore $\langle j, k\rangle$-invariant. Soit $\tilde{q}_0$ un paramètre d'unipotence maximal pour B_0. D'après le Corollaire 5.1.16, on a $\tilde{q}_0 \leq \tilde{q}_1$.

On suppose (à conjugaison près) que $\ell = i_1$. Alors il vient $Y_1 \leq Z(F^\circ(B_1)) \leq N \leq B_0$, donc $\tilde{q}_0 = \tilde{q}_1$. Le Lemme 1.9.1 (ou 1.8.5) appliqué avec Y_1 impose $U_{\tilde{q}_1}(B_0) = U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ puis $B_0 = B_1$. En particulier, k normalise $B_1 = C(\ell)$, une contradiction.

On a donc (à conjugaison près) $\ell = i_2$. Cette fois il vient $Y_2 \leq N \leq B_0$, et pour fuir la contradiction du Lemme 1.9.1 (ou 1.8.5), il vient $\tilde{q}_0 > \tilde{q}_2$. Soit Y_0 un sous-groupe de B_0 comme dans le Lemme 5.3.2. Notons que j ou bien k est une involution de i_3^G. Les deux inversent Y_2.

Supposons que ce soit j ; elle inverse alors Y_0 d'après le Lemme 5.3.2. Dans B_0, il y a Y_2 et Y_0 ; l'un normalise l'autre et chacun est inversé par j, donc le Lemme 1.3.1 impose $[Y_2, Y_0] = 1$. En particulier $Y_0 \leq N^\circ(Y_2) = B_2$, ce qui contredit $\tilde{q}_0 > \tilde{q}_2$. Il est clair que si c'est k l'involution de i_3^G, le même calcul est valable ! □

Nous avons donc rendu triviaux les ensembles $\tau_{C(i_1)}[w_2]$, $\tau_{C(i_1)}[w_3]$, $\tau_{C(i_2)}[w_1]$, et $\tau_{C(i_2)}[w_3]$. Pour pouvoir mener de victorieux calculs de rang, il faut encore réduire à néant les ensembles de la forme $\tau_{C(i_3)}[w_1]$ (par exemple). C'est ce que nous faisons désormais, avec la proposition suivante.

Proposition 5.4.7 *Soit $w_1 \in i_1^G \setminus B_3$. Alors $\tau_{C(i_3)}[w_1]$ est trivial.*

La preuve de la Proposition 5.4.7 nécessitera des notations et un argument sophistiqué, reposant sur un troisième principe de contrôle de l'unipotence.

Lemme 5.4.8 (cf. Lemmes 5.1.15 et 5.3.2) *Soient B_0 un sous-groupe de Borel et $\tilde{q}_0$ un paramètre d'unipotence maximal pour B_0. On suppose $\tilde{q}_0 > \tilde{q}_3$. Alors il existe un $\tilde{q}_0$-sous-groupe définissable Y_0 sans involution, normal dans $N(B_0)$, et central dans $F^\circ(B_0)$, tel que toute involution de $N(B_0) \cap i_3^G$ inverse Y_0.*

Preuve

Si $F^\circ(B_0)$ est sans involution, et notant ℓ_3 une involution de $N(B_0) \cap i_3^G$, on a que $C_{U_{\tilde{q}_0}(B_0)}(\ell_3)$ est un $\tilde{q}_0$-groupe d'après le Fait 1.8.21. Par définition de $\tilde{q}_0$, il est trivial. Dans ce premier cas, le sous-groupe $Y_0 = U_{\tilde{q}_0}(Z(F^\circ(B_0)))$ convient évidemment.

On suppose à présent que $F^\circ(B_0)$ possède une involution ; c'est une G-conjuguée de i_1 ou i_2 (mais pas de i_3). Le sous-groupe Y_i associé (Notation 5.2.47 ou 5.3.31) convient alors (ne pas oublier que dans ce cas $N(B_0) = B_0$). □

Nous fixons des notations pour la preuve de la Proposition 5.4.7.

Soit $\tau = \tau_{C(i_3)}[w_1] \neq 1$ la démentant, nous pousserons la configuration à la faute. Soit k_2 l'unique involution de $d(w_1 i_3)$; c'est une G-conjuguée de i_2 qui inverse le groupe abélien connexe $\tau \leq F^\circ(B_3)$ (Corollaire 5.4.5).

Soit $\ell_3 = w_1 k_2$. Soit V_0 le Viergruppe $\{1, w_1, k_2, \ell_3\}$. Ecrivons $w_1 = i_1^g$ et $k_2 = i_2^h$ pour un g et un h de G.

Formons $N = N^\circ(\tau)$ qui est $\langle w_1, k_2\rangle$-invariant ; d'après le Théorème 4.3.4, N est inclus dans un sous-groupe de Borel B_0 encore $\langle w_1, k_2\rangle$-invariant. Soit $\tilde{q}_0$ un paramètre d'unipotence maximal pour B_0.

Comme $\tau \leq F^\circ(B_3)$ (Corollaire 5.4.5), on a $U_{\tilde{q}_3}(Z(F^\circ(B_3))) \leq N^\circ(\tau) \leq B_0$. En particulier il faut $\tilde{q}_0 > \tilde{q}_3$ pour échapper à une contradiction devenue classique. Soit Y_0 donné par le Lemme 5.4.8. Précisons que Y_0 est un $\tilde{q}_0$-groupe abélien sans involution, que V_0 le normalise, et que ℓ_3 l'inverse.

Lemme 5.4.9 *L'action de w_1 (et donc, celle de k_2) est "sans mélange" sur Y_0 (i.e., de pure centralisation ou bien de pure inversion).*

Preuve

On suppose qu'il existe $x \in C_{Y_0}(w_1)^\#$. Dans $C(w_1)$, se trouvent alors $d(x)$ (qui est $2^\perp$) et Y_1^g ; l'un normalise l'autre et chacun est inversé par ℓ_3, donc d'après le Lemme 1.3.1, on a $[x, Y_1^g] = 1$. Ainsi $Y_1^g \leq C^\circ(x)$ qui est un groupe V_0-invariant, que l'on inclut dans un sous-groupe de Borel B_α encore V_0-invariant. Nous en choisissons un paramètre d'unipotence maximal $\tilde{q}_\alpha$. Puisque $Y_1^g \leq B_\alpha$, il est clair d'après le Corollaire 5.1.16 que $\tilde{q}_\alpha = \tilde{q}_1$. Le Lemme 1.9.1 appliqué à Y_1 impose alors $U_{\tilde{q}_1}(B_\alpha) = U_{\tilde{q}_1}(B_1^g)$ puis $B_\alpha = B_1^g = C(w_1)$. En particulier, $Y_0 \leq C^\circ(x) \leq B_\alpha = C(w_1)$.

On suppose à présent qu'il existe $y \in C_{Y_0}(k_2)^\#$. Dans $C(k_2)$, se trouvent alors $d(y)$ (qui est $2^\perp$) et Y_2^h ; l'un normalise l'autre et chacun est inversé par ℓ_3, donc d'après le Lemme 1.3.1, on a $[y, Y_2^h] = 1$. Ainsi $Y_2^h \leq C^\circ(y)$ qui est un groupe V_0-invariant, que l'on inclut dans un sous-groupe de Borel B_β encore V_0-invariant. Nous en choisissons un paramètre d'unipotence maximal $\tilde{q}_\beta$. Si $\tilde{q}_\beta > \tilde{q}_2$, soit Y_β un sous-groupe comme dans le Lemme 5.3.2. Dans B_β, se trouvent alors Y_2^h et Y_β ; l'un normalise l'autre et chacun est inversé par ℓ_3. D'après le Lemme 1.3.1, il vient $[Y_\beta, Y_2^h] = 1$, et donc $Y_\beta \leq N^\circ(Y_2^h) = B_2^h$, une contradiction à l'hypothèse $\tilde{q}_\beta > \tilde{q}_2$. Ainsi $\tilde{q}_\beta = \tilde{q}_2$. Maintenant le Lemme 1.9.1 appliqué avec Y_2 force $U_{\tilde{q}_2}(B_\beta) = U_{\tilde{q}_2}(B_2^h)$ puis $B_\beta = B_2^h = C(k_2)$. Ainsi $Y_0 \leq C^\circ(y) \leq B_\beta = C(k_2)$.

La conclusion est que s'il existe simultanément un $x \in C_{Y_0}(w_1)^{\#}$ et un $y \in C_{Y_0}(k_2)^{\#}$, alors $Y_0 \leq (C(w_1) \cap C(k_2))^\circ = C^\circ(V_0) \leq C^\circ(\ell_3)$, une contradiction au fait que $\tilde{q}_0 > \tilde{q}_3$. □

Preuve de la Proposition 5.4.7

Grâce au Lemme 5.4.9, l'involution w_1 ou bien centralise Y_1, ou bien l'inverse. Cela signifie que w_1 ou bien k_2 centralise Y_0.

Supposons que w_1 centralise Y_0. Dans $C(w_1)$ se trouvent alors Y_0 et Y_1^g ; l'un normalise l'autre et ℓ_3 inverse les deux. D'après le Lemme 1.3.1 il vient $[Y_0, Y_1^g] = 1$. En particulier $Y_1^g \leq N^\circ(Y_0) = B_0$, $Y_0 \leq N^\circ(Y_1^g) = B_1^g$, et $\tilde{q}_0 = \tilde{q}_1$. Le Lemme 1.9.1 (ou 1.8.5) appliqué avec Y_1^g impose alors $U_{\tilde{q}_1}(B_0) = U_{\tilde{q}_1}(B_1)^g$, d'où $B_0 = B_1^g = C(w_1)$. Ainsi $\tau \leq N^\circ(\tau) \leq B_0 = C(w_1)$, une contradiction au fait que w_1 inverse τ.

Supposons que k_2 centralise Y_0. Dans $C(k_2)$ se trouvent alors Y_0 et Y_2^h ; l'un normalise l'autre et ℓ_3 inverse les deux. D'après le Lemme 1.3.1 il vient $[Y_0, Y_2^h] = 1$. En particulier $Y_2^h \leq N^\circ(Y_0) = B_0$, $Y_0 \leq N^\circ(Y_2^h) = B_2^h$, et $\tilde{q}_0 = \tilde{q}_2$. Le Lemme 1.9.1 (ou 1.8.5) appliqué avec Y_2^h impose alors $U_{\tilde{q}_2}(B_0) = U_{\tilde{q}_2}(B_2^h)$, d'où $B_0 = B_2^h = C(k_2)$. Ainsi $\tau \leq N^\circ(\tau) \leq B_0 = C(k_2)$, une contradiction au fait que k_2 inverse τ.

Ceci achève la preuve de la Proposition 5.4.7. □

5.4.3 Calculs

Corollaire 5.4.10 $\mathrm{rg}(C(i_1)) = \mathrm{rg}(C(i_2))$. *En outre pour g générique dans G, il existe dans le coset $gC(i_1)$ une involution $w_2 \in i_2^G$.*

Preuve

On considère la projection

$$\begin{array}{rccc} \pi_{12}: & i_1^G \setminus C(i_2) & \to & G/C(i_2) \\ & w_1 & \mapsto & w_1 C(i_2). \end{array}$$

La fibre au-dessus de $w_1C(i_2)$ est incluse dans $w_1 T_{C(i_2)}[w_1]$, qui est toujours fini d'après le Corollaire 5.4.6. En particulier, il vient

$$\mathrm{rg}\left(\pi_{12}(i_1^G \setminus C(i_2))\right) = \mathrm{rg}(G) - \mathrm{rg}(C(i_1)) \leq \mathrm{rg}(G) - \mathrm{rg}(C(i_2)).$$

Maintenant, toujours grâce au Corollaire 5.4.6, l'inégalité réciproque est vraie en considérant la fonction π_{21}. Il suit que $\mathrm{rg}(C(i_1)) = \mathrm{rg}(C(i_2))$, et que l'image de π_{12} est générique dans $G/C(i_2)$. De même avec π_{21}. □

Corollaire 5.4.11 $\mathrm{rg}(C(i_1)) = \mathrm{rg}(C(i_3))$. *En outre pour g générique dans G, il existe dans le coset $gC(i_1)$ une involution $w_3 \in i_3^G$.*

Preuve

On considère à présent la projection π_{13}. La fibre au-dessus de $w_1C(i_3)$ est incluse dans $w_1 T_{C(i_3)}[w_1]$, qui est toujours fini d'après la Proposition 5.4.7. En particulier, il vient cette fois $\mathrm{rg}\left(\pi_{13}(i_1^G \setminus C(i_3))\right) = \mathrm{rg}(G) - \mathrm{rg}(C(i_1)) \leq \mathrm{rg}(G) - \mathrm{rg}(C(i_3))$.

Maintenant, grâce au Corollaire 5.4.6, l'inégalité réciproque est aussi vraie en considérant la fonction π_{31}. Il suit que $\mathrm{rg}(C(i_1)) = \mathrm{rg}(C(i_3))$, et que l'image de π_{13} est générique dans $G/C(i_3)$. De même avec π_{31}. □

Corollaire 5.4.12 *Les involutions sont conjuguées.*

Preuve

D'après les Corollaires 5.4.10 et 5.4.11, pour g générique dans G, on trouve dans le coset gB_1 une conjuguée w_2 de i_2 *et* une conjuguée w_3 de i_3.

Comme w_2 et w_3 ne sont pas conjuguées, il existe d'après le Lemme 5.4.2 une involution j dans $d(w_2w_3) \leq B_1$ qui est conjuguée à i_1. Il est donc clair que $j = i_1$. En particulier i_1 et w_2 commutent, et par cotoricité $w_2 \in C(i_1) = B_1$, une contradiction. □

5.5 Synthèse et conjectures

Nous rassemblons maintenant le Théorème 5.2.1 et le Corollaire 5.4.12. La Notation 5.1.4 définissait Q comme un sous-groupe de Carter de G contenant S° ; il est abélien d'après le Corollaire 5.1.5. Rappelons le résultat annoncé au début du chapitre.

Théorème 5.0.1 *Soit G un groupe simple connexe minimal de type impair et rang de Prüfer 2. Soit S un 2-sous-groupe de Sylow de G. Alors $I(S) = I(S^\circ)$ et les involutions de G sont conjuguées. Le centralisateur connexe de chacune est un sous-groupe de Borel. En outre $C^\circ(S^\circ) = C^\circ(I(S^\circ))$ est un sous-groupe de Carter abélien de G, égal à la composante connexe de chacune des trois intersections deux-à-deux de ces sous-groupes de Borel.*

Preuve

Tout est prouvé sauf l'assertion concernant $C^\circ(S^\circ)$. Comme $V \leq Q \leq C^\circ(S^\circ) \leq C^\circ(V)$, il suffit de montrer l'abélianité de $C^\circ(V)$. Nous utiliserons le sous-groupe Y_1 introduit par la Notation 5.2.47 et ses propriétés décrites dans la Proposition 5.2.57.

Supposons $B_1 \cap B_2$ non-abélien. Soient $X = F^\circ(B_1) \cap F^\circ(B_2) \neq 1$, $N = N^\circ(X)$, et $\tilde{q}$ un paramètre d'unipotence maximal pour N. Comme V normalise X donc N, le Corollaire 5.1.16 implique $\tilde{q} \leq \tilde{q}_1$. Maintenant $Y_1 \leq C^\circ(F^\circ(B_1)) \leq C^\circ(X) \leq N$ impose que $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ est l'unique $\tilde{q}_1$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{q}_1}(N)$. Tout cela vaut encore pour B_2, donc $B_1 = B_2$, une contradiction à la Proposition 5.3.24.

Ainsi $B_1 \cap B_2$ est-il abélien. En particulier, l'inclusion $Q \leq (B_1 \cap B_2)^\circ$ se transforme en égalité, car Q est un sous-groupe de Carter de G. Maintenant $Q = (B_1 \cap B_2)^\circ = C^\circ(i_1, i_2) = C^\circ(V)$.

Il en va de même avec les deux autres intersections. □

Rappelons en outre que $C^\circ(i_1) \neq C^\circ(i_2)$, et qu'il existe un sous-groupe normal $Y_1 \triangleleft C^\circ(i_1)$ de paramètre d'unipotence maximal pour $C^\circ(i_1)$, tel que toute involution de $C^\circ(i_1) \setminus \{i_1\}$ inverse Y_1 (Propositions 5.3.24 et 5.2.57).

5.5.1 Sous-groupes de Borel généreux

Lemme 5.5.1 *Soit B_0 un sous-groupe de Borel contenant Q et distinct de B_1, B_2, et B_3. Pour i dans $V^\#$, soit $H_i = (B_i \cap B_0)^\circ$. Alors il existe dans V au moins deux involutions i telles que H_i ne soit pas abélien.*

Preuve

$H_i = C^\circ_{B_0}(i) \geq Q$. Si H_i est abélien, alors $H_i = Q$. Maintenant d'après le Fait 5.0.2, on a $B_0 = \langle H_i, i \in V^\# \rangle > H_j$ pour chaque j. Donc au moins deux parmi les H_i sont non-abéliens. □

Lemme 5.5.2 *Hypothèses et notations du lemme précédent. Si H_i n'est pas abélien, alors (B_0, B_i) est une paire maximale (au sens de la sous-section 1.8.7 du chapitre 1) où $d_\infty(B_i) > d_\infty(B_0)$.*

Preuve

Soit en effet $\tilde{q}_0$ un paramètre d'unipotence maximal pour B_0. D'après le Corollaire 5.1.16, on a $\tilde{q}_0 \leq \tilde{q}_1$. Supposons l'égalité. Soient $X = F^\circ(B_0) \cap F^\circ(B_1)$ et $N = N^\circ(X)$, tous deux V-invariants. Soit $\tilde{q}_N$ un paramètre d'unipotence maximal pour N. D'après le Corollaire 5.1.16, on a $\tilde{q}_N \leq \tilde{q}_1$. Comme $Y_1 \leq N$, on a égalité. En particulier, $U_{\tilde{q}_1}(B_1)$ est l'unique $\tilde{q}_1$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{q}_1}(N)$. Mais comme nous avons supposé $\tilde{q}_0 = \tilde{q}_1$, il vient $1 \neq U_{\tilde{q}_1}(Z(F^\circ(B_0))) \leq N$, et donc d'après le Lemme 1.9.1 appliqué à $U_{\tilde{q}_1}(Z(F^\circ(B_0)))$, on a que $U_{\tilde{q}_1}(B_0)$ est l'unique $\tilde{q}_1$-sous-groupe de Sylow de G contenant $U_{\tilde{q}_1}(N)$. Cela force $B_1 = B_0$, une contradiction.

Ainsi $\tilde{q}_1 > \tilde{q}_0$, et le Fait 1.8.31 (4) prouve la maximalité (au sens des intersections) de H_i, et celle de la paire (B_0, B_i). □

Proposition 5.5.3 *Il y a au plus deux classes de conjugaison de sous-groupes de Borel généreux.*

Preuve

Soient B_0 et $\hat{B}_0$ deux sous-groupes de Borel généreux non conjugués à B_1 ; on montre qu'ils sont conjugués. Un sous-groupe de Carter de B_0 (resp. $\hat{B}_0$) est généreux dans G ; en particulier, il y est quasi-autonormalisant. Donc un sous-groupe de Carter de B_0 (resp. $\hat{B_0}$) est un sous-groupe de Carter de G. A conjugaison près, on peut supposer que $B_0 \geq Q$ (resp. $\hat{B_0} \geq Q$).

D'après le Lemme 5.5.1, il existe une même $i \in V^\#$ telle que $H = (B_0 \cap B_i)^\circ$ et $\hat{H} = (\hat{B_0} \cap B_i)^\circ$ soient non-abéliens. D'après le Lemme 5.5.2, H et $\hat{H}$ sont les intersections non-abéliennes des paires maximales (B_0, B_i) et $(\hat{B_0}, B_i)$, où le sous-groupe de Borel de plus grand degré d'unipotence est dans les deux cas B_i.

D'après [Bur07, Lemma 3.30], B_0 et $\hat{B_0}$ sont $F^\circ(B_i)$-conjugués. □

5.5.2 Directions

Le temps sans compassion n'a pas permis de suivre plus avant la voie tracée par [CJ04]. Il est envisageable d'aborder les points suivants :

1. Prouver la connexité du centralisateur du Viergruppe, i.e. établir $C(V) = C^\circ(V) = Q$.
2. En déduire un contrôle sur le groupe de Weyl, i.e. prouver $|N(Q)/Q| = 3$.
3. Prouver que l'élément générique de $N(Q) \setminus Q$ est d'ordre 3.
4. Faire apparaître un corps (algébriquement clos) de caractéristique 3.

Il semble plus douteux de scinder les centralisateurs en une partie unipotente complétée par le sous-groupe de Carter ; la géométrie des sous-groupes de Borel non-généreux, décrite dans [CJ04], forme un autre sujet sur lequel se prononcer serait peu prudent.

Conclusions

Le but de la thèse était de réécrire, sans hypothèses modèles-théoriques mais grâce à l'unipotence de Burdges, un théorème d'identification de PSL_2 compris dans un résultat de Cherlin et Jaligot.

Fait ([CJ04, Theorem 1.8]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini* ordinaire*, simple connexe minimal, et de type impair. Soient S un 2-sous-groupe de Sylow de G, $V = \langle I(S^\circ)\rangle$, $T = C^\circ(S^\circ)$, $C = C^\circ(V)$, et $W = N(T)/T$. Alors le rang de Prüfer de G est au plus 2, et l'on a les possibilités suivantes :*

1. *Le rang de Prüfer de G est 1 :*
   - *(a) Si C n'est pas un sous-groupe de Borel de G, alors $G \simeq \mathrm{PSL}_2(K)$, où K est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2.*
   - *(b) Si C est un sous-groupe de Borel de G et que $W \neq 1$, alors $C = T$ est 2-divisible et abélien, $|W| = 2$, W agit par inversion sur T, et $N(T)$ se scinde sous la forme $T \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En outre toutes les involutions de G sont conjuguées.*
2. *Le rang de Prüfer de G est 2 :*
   Alors $T = C = C(V)$ est nilpotent, $|W| = 3$, toutes les involutions de G sont conjuguées, et G interprète un corps algébriquement clos de caractéristique 3. En outre :
   - *(a) Si C n'est pas un sous-groupe de Borel de G, alors T est divisible abélien, et pour chaque involution i de S°, le sous-groupe $B_i = C^\circ(i)$ est un sous-groupe de Borel de la forme $O(B_i) \rtimes T$, où $O(B_i)$ est inversé par les deux involutions de T distinctes de i.*
   - *(b) Sinon, C est un sous-groupe de Borel nilpotent de G.*

Et c'est enfin mon *anch'io son pittore*.

Théorème *Soit G un groupe de rang de Morley fini, simple connexe minimal, et de type impair. Soient S un 2-sous-groupe de Sylow de G, $V = \langle I(S^\circ)\rangle$, $T = C^\circ(S^\circ)$, $C = C^\circ(V)$, et $W = N(T)/T$. Alors le rang de Prüfer de G est au plus 2, et l'on a les possibilités suivantes :*

1. *Le rang de Prüfer de G est 1 :*
   - *(a) Si C n'est pas un sous-groupe de Borel de G, alors $G \simeq \mathrm{PSL}_2(K)$, où K est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2.*
   - *(b) Si C est un sous-groupe de Borel de G et que $W \neq 1$, alors $C = T$ est 2-divisible et abélien, $|W| = 2$, W agit par inversion sur T, et $N(T)$ se scinde sous la forme $T \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En outre toutes les involutions de G sont conjuguées.*
2. *Le rang de Prüfer de G est 2 :*
   Alors $T = C$ est nilpotent, et toutes les involutions de G sont conjuguées. En outre C n'est pas un sous-groupe de Borel de G, T est divisible abélien, et pour chaque involution i de S°, le sous-groupe $B_i = C^\circ(i)$ est un sous-groupe de Borel admettant un sous-groupe très unipotent inversé par les deux involutions de T distinctes de i.

Le cas (2) réécrit est clairement plus faible ; quant à sa seule amélioration apparente, elle découle essentiellement du Fait 1.1.3, et je n'y suis pour presque rien. Mais s'approcher autant que possible d'un théorème de Cherlin et Jaligot était un objectif respectable ; il eût été bien immodeste de prétendre à dépasser les deux chercheurs !

Bibliographie

[ABC06] Tuna Altınel, Alexandre Borovik, and Gregory Cherlin. *Simple groups of finite Morley Rank*. 2006. Livre à paraître.

[BBC06] Alexandre Borovik, Jeffrey Burdges, and Gregory Cherlin. Involutions in groups of finite Morley rank. 2006. Soumis.

[BC06] Jeffrey Burdges and Gregory Cherlin. On semisimple torsion in groups of finite Morley rank. 2006. Preprint.

[BC07] Alexandre Borovik and Gregory Cherlin. Permutation Groups of finite Morley rank. *Cambridge University Press - Newton Institute*, 2007. A paraître.

[BCJ07] Jeffrey Burdges, Gregory Cherlin, and Eric Jaligot. Minimal connected simple groups of finite Morley rank with strongly embedded subgroups. *J. Algebra*, 2007. A paraître.

[BHMPW06] Andreas Baudisch, Martin Hils, Amador Martin-Pizarro, and Frank O. Wagner. Die böse Farbe. 2006. Preprint. URL http ://math.univ-lyon1.fr/$\sim$wagner/publ.html.

[BN94] Alexandre Borovik and Ali Nesin. *Groups of finite Morley rank*, volume 26 of *Oxford Logic Guides*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1994. Oxford Science Publications.

[Bor95] Alexandre Borovik. Simple locally finite groups of finite Morley rank and odd type. In *Finite and locally finite groups (Istanbul, 1994)*, volume 471 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 247–284. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.

[Bur04] Jeffrey Burdges. *Simple Groups of Finite Morley Rank of Odd and Degenerate Type*. PhD thesis, Rutgers University, New Brunswick, New Jersey, 2004.

[Bur07] Jeffrey Burdges. The Bender method in groups of finite Morley rank. *J. Algebra*, 2007. A paraître.

[Che05] Gregory Cherlin. Good tori in groups of finite Morley rank. *J. Group Theory*, 8(5) :613–621, 2005.

[CJ04] Gregory Cherlin and Eric Jaligot. Tame minimal simple groups of finite Morley rank. *J. Algebra*, 276(1) :13–79, 2004.

[DN94] Mark DeBonis and Ali Nesin. On CN-groups of finite Morley rank. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 50(3) :532–546, 1994.

[FJ07] Olivier Frécon and Eric Jaligot. Conjugacy in groups of finite Morley rank. *Cambridge University Press - Newton Institute*, 2007. A paraître.

[Jal00] Eric Jaligot. FT-Groupes. *Prépublications de l'institut Girard Desargues*, (33), Janvier 2000. UPRESA 5028.

[Jal06] Eric Jaligot. Generix never gives up. *J. Symbolic Logic*, 71(2) :599–610, 2006.

[Poi87] Bruno Poizat. *Groupes stables*. Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, Villeurbanne, 1987.

[Tho68] J. G. Thompson. Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74 :383–437, 1968.

[Wag01] Frank Wagner. Fields of finite Morley rank. *J. Symbolic Logic*, 66(2) :703–706, 2001.

Et puis, et puis encore ?

Hypothèses et notations du chapitre 5 ; nous répondons aux questions de §5.5.2. L'analyse continue grâce au résultat suivant.

Fait 5.5.4 ([BC06, Corollary 5.3]) *Soit G un groupe simple connexe minimal de rang de Morley fini. Soit T un tore décent maximal. On suppose que le groupe fini $N(T)/C^\circ(T)$ est d'ordre impair ; soit r le plus petit diviseur premier de cet ordre. Soit x un r-élément de $N(T)$ d'ordre r dans le quotient. Alors $C^\circ(x)$ contient de la r-unipotence.*

Nous utiliserons également un classique.

Fait 5.5.5 ([BP90, Proposition 3.2]) *Soient P un p-tore et $\Omega_{p^2} = \{x \in P, x^{p^2} = 1\}$. Si un automorphisme d'ordre fini de P centralise Ω_{p^2}, alors il centralise P.*

Et enfin deux résultats complémentaires.

Fait 5.5.6 ([CJ04, Lemma 3.6]) *Soit H un groupe de rang de Morley fini tel que H° soit abélien. Si x est un élément de $H \setminus H^\circ$ tel que les éléments du coset xH° soient génériquement d'ordre n pour un entier $n > 1$, alors tout élément de xH° est d'ordre n.*

Fait 5.5.7 ([CJ04, Lemma 3.7]) *Soit H un groupe de rang de Morley fini. On suppose que H° est nilpotent, que H/H° est d'ordre un nombre premier p, et que les éléments de chaque coset de H° distinct de H° sont génériquement d'ordre p. Si un élément $x \in H \setminus H^\circ$ a un centralisateur infini dans H°, alors H° contient un sous-groupe p-unipotent non-trivial.*

Nous aurions pu préciser la structure du 2-sous-groupe de Sylow.

Proposition 5.5.8 *Le 2-sous-groupe de Sylow est connexe.*

Preuve

Soit $\alpha \in S \setminus S^\circ$; on peut supposer $\alpha^2 \in S^\circ$. Soit $\tau = C^\circ_{S^\circ}(\alpha)$.

On suppose dans un premier temps que $\tau \neq 1$. Comme α est torique d'après le Fait 1.4.5, on a $\alpha \in C^\circ(\alpha)$. D'autre part $\tau \leq C^\circ(\alpha)$; en particulier $\tau \cdot \langle\alpha\rangle \leq C^\circ(\alpha)$. D'après le Fait 1.4.4, les 2-sous-groupes de Sylow de $C^\circ(\alpha)$ sont des 2-tores ; en particulier τ et α sont inclus dans un même 2-tore noté S_1° de $C^\circ(\alpha)$. Maintenant $\alpha \in S_1^\circ \leq C^\circ(\tau)$ donc $S^\circ \cdot \langle\alpha\rangle \leq C^\circ(\tau)$. Toujours d'après le Fait 1.4.4, les 2-sous-groupes de Sylow de $C^\circ(\tau)$ sont des 2-tores, et comme S° est un 2-tore maximal de G il vient en particulier $\alpha \in S^\circ$, une contradiction.

On suppose alors $\tau = 1$. Comme $\alpha^2 \in S^\circ$, α agit sur S° comme un automorphisme définissable involutif n'ayant qu'un nombre fini de points fixes. D'après le Fait 1.3.3, α inverse S° ; en particulier $\alpha^2 \in C_S(S^\circ) = S^\circ$ d'après le Fait 1.3.12. Maintenant d'après le Corollaire 5.1.2 on a $\alpha^2 \neq 1$. On forme alors $C^\circ(\alpha^2)$ qui est un sous-groupe connexe résoluble. D'une part comme α est torique d'après le Fait 1.4.5, on a $\alpha \in C^\circ(\alpha) \leq C^\circ(\alpha^2)$. D'autre part $S^\circ \leq C^\circ(\alpha^2)$. On a donc $S^\circ \cdot \langle\alpha\rangle \leq C^\circ(\alpha)$ dont les 2-sous-groupes de Sylow sont des 2-tores de G d'après le Fait 1.4.4. Comme S° est un 2-tore maximal de G il vient $\alpha \in S^\circ$, une contradiction qui achève la preuve. □

Notation 5.5.9 *Soit $W = N(Q)/Q$.*

Théorème 5.5.10 $W \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Preuve

Commençons par montrer la non-trivialité de W. D'après le Corollaire 5.4.12, les trois involutions de G sont conjuguées. D'après le Fait 1.3.8, $N(S^\circ)$ contrôle la fusion ; en particulier il existe $g \in N(S^\circ)$ tel que $i_1^g = i_2$. On a donc $g \in N(S^\circ) \leq N(C^\circ(S^\circ)) = N(Q)$ d'après le Théorème 5.0.1. Comme Q est abélien, il est clair que $g \notin Q$. Le quotient $W = N(Q)/Q$ est donc non-trivial.

Nous prouverons que $W = N_G(S^\circ)/C_G(S^\circ)$. Pour cela nous montrons d'abord que $C(S^\circ)$ est connexe. Soit en effet $x \in C(S^\circ) \setminus C^\circ(S^\circ)$; grâce au Fait 1.4.1 on peut supposer que x est un p-élément. Supposons que $C^\circ(x)$ soit sans p-unipotence. Alors d'après le Fait 1.4.5, x est dans tout p-tore maximal de $C^\circ(x)$. Mais par conjugaison des tores décents maximaux (Fait 1.2.7), tout tore décent maximal de $C^\circ(x)$ contient un p-tore maximal. Ainsi x est-il dans tout tore décent maximal de $C^\circ(x)$. Comme $S^\circ \leq C^\circ(x)$, x est dans un même tore décent que S°. Cela prouve $x \in C^\circ(S^\circ)$, et cette contradiction au choix de x prouve que $C^\circ(x)$ contient de la p-unipotence, c'est-à-dire que $U_p(C^\circ(x)) \neq 1$.

Maintenant grâce au Fait 5.0.2 et par conjugaison des involutions, on peut supposer que $C^\circ_{U_p(C^\circ(x))}(i_1) \neq 1$. D'après le Lemme 1.8.5, $B_1 = C^\circ(i_1)$ est l'unique sous-groupe de Borel contenant $C^\circ_{U_p(C^\circ(x))}(i_1)$, et en particulier il vient $x \in N(B_1)$. D'autre part B_1 contient de la p-unipotence. Si $x \in B_1$, alors $x \in N_{B_1}(Q) = Q$ d'après le Fait 1.5.2, d'où $x \in C^\circ(S^\circ)$, contre le choix de x. Ainsi $x \in N(B_1) \setminus B_1$. Le Fait 4.1.2 appliqué à B_1 prouve alors l'existence d'un élément $y \in xB_1$ normalisant un conjugué B_1^g *distinct* de B_1. Or $y \notin B_1$ mais $y^{p^n} \in B_1$ pour un n, et il y a donc de la p-torsion dans $d(y)$. Soit enfin z un p-élément de $d(y)$. Alors $z \in N(B_1) \cap N(B_1^g)$, et le Fait 1.4.3 (3) implique $C^\circ_{U_p(B_1)}(z) \neq 1$ et $C^\circ_{U_p(B_1)^g}(z) \neq 1$. Le Lemme 1.8.5 appliqué autour de $C^\circ(z)$ force $B_1^g = B_1$, une contradiction qui achève de prouver la connexité de $C(S^\circ)$.

D'après le Théorème 5.0.1 $Q = C^\circ(S^\circ)$; il vient $Q = C(S^\circ)$. D'autre part S° est caractéristique dans Q et $Q = C^\circ(S^\circ)$, donc $N(Q) = N(S^\circ)$. Ainsi, $W = N(Q)/Q = N_G(S^\circ)/C_G(S^\circ)$.

Nous estimons à présent l'ordre de W. Nous notons $\mathrm{Aut}_{\mathrm{fin}}$ l'ensemble des automorphismes *d'ordre fini* d'une structure (ce n'est pas nécessairement un groupe). Par rigidité, on a une injection $N_G(S^\circ)/C_G(S^\circ) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z}_{2^\infty}^2)$. D'après le Fait 5.5.5, $\mathrm{Aut}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z}_{2^\infty}^2) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{fin}}\left((\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2\right)$, mais clairement $\mathrm{Aut}_{\mathrm{fin}}\left((\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2\right) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$. En résumé $N_G(S^\circ)/C_G(S^\circ) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$.

Maintenant un calcul donne $|\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})| = 96 = 2^5 \cdot 3$, et cela prouve que $W = N_G(S^\circ)/C_G(S^\circ)$ s'injecte dans un groupe à 96 éléments. S'il existe un 2-élément dans l'image, on construit grâce au Fait 1.4.1 un 2-élément dans $N_G(S^\circ) \setminus C_G(S^\circ)$, et cela contredit la connexité du 2-sous-groupe de Sylow (Proposition 5.5.8). W s'injecte donc dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et comme $W \neq 1$ la conclusion suit. □

Notation 5.5.11 *Soit σ un 3-élément de $N(Q)$ qui soit d'ordre 3 modulo Q (son existence est assurée par le Fait 1.4.1) ; il est clair que σ permute circulairement les involutions de V.*

Corollaire 5.5.12 *Pour chaque involution i de G, $C(i)$ est un sous-groupe de Borel de G. En outre $C(V)$ est un sous-groupe de Carter de G.*

Preuve

Au vu du Théorème 5.0.1, il suffit de prouver la connexité de $C(i)$ puis de $C(V)$. Tout d'abord par un argument de Frattini dans $C^\circ(i)$, on a $C(i) = C^\circ(i) \cdot N_{C(i)}(Q)$. Si $C(i) > C^\circ(i)$, alors $\sigma \in C(i)$. Maintenant i étant l'unique involution centrale de $C^\circ(i)$, est caractéristique dans $C^\circ(i)$. En particulier $i^\sigma = i$, ce qui contredit le choix de σ. $C(i)$ est donc connexe.

Maintenant $Q \leq C(V) \leq C(i)$ qui est connexe, donc d'après le Fait 1.5.2 $N_{C(i)}(Q) = Q$, d'où $C(V) \leq N_{C(i)}(V) \leq N_{C(i)}(C^\circ(V)) = N_{C(i)}(Q) = Q$. □

Un analogue de [CJ04, Lemma 6.15] requiert une rigidité plus grande que celle de l'unipotence en caractéristique nulle. Grâce au Fait 5.5.4, l'unipotence de torsion arrive à point nommé.

Lemme 5.5.13 *$C^\circ(\sigma)$ contient de la 3-unipotence.*

Preuve

C'est le Fait 5.5.4. □

Lemme 5.5.14 *L'élément générique de σQ est d'ordre 3 ; il en va de même de celui de $\sigma^2 Q$.*

Preuve

D'après le Fait 4.1.2, l'ensemble $X = \{x \in \sigma Q$ tels que $\exists g \in G \setminus N_G(Q),\ x \in (\langle\sigma\rangle Q)^g\}$ est générique dans σQ. Nous fixons une réalisation x du générique de σQ ; il existe alors $g \notin N(Q)$ tel que $x \in (\langle\sigma\rangle Q)^g$. Soit $y = x^3$. On suppose $y^3 \neq 1$, et l'on montre une contradiction.

D'après le Lemme 5.5.13, $C^\circ(x)$ contient un sous-groupe 3-unipotent non-trivial noté U. Alors $U \leq C^\circ(x) \leq C^\circ(y)$ que l'on inclut dans un sous-groupe de Borel B_0. Ce sous-groupe de Borel contient $C^\circ(y) \geq Q$, il est donc généreux.

Supposons que B_0 ne soit pas un conjugué de B_1. D'après les Lemmes 5.5.1 et 5.5.2, B_0 est alors impliqué dans au moins une paire maximale non-abélienne (au sens de la sous-section 1.8.7 du chapitre 1). Or $B_0 \geq C^\circ(y)$ contient de la 3-unipotence, et cela contredit le Fait 1.8.33 (7).

Ainsi B_0 est conjugué à B_1, et en particulier il existe une involution notée simplement i telle que $B_0 = C^\circ(i)$. Alors $Q, Q^g \leq C^\circ(y) \leq C^\circ(i)$, et donc $i \in V \cap V^g$. D'autre part $V \neq V^g$ car sinon $Q = C(V) = C(V^g) = Q^g$, contre le fait que $g \notin N(Q)$. Ainsi a-t-on $V \cap V^g = \{i\}$.

Rappelons que $x \in N(Q) = N(V)$, d'où $i^x \in V$. D'autre part $x \in N(Q)^g$ et $i \in V^g$, d'où $i^x \in V^g$. Ainsi $i^x \in V \cap V^g = \{i\}$, d'où $x \in C(i)$. En particulier $\sigma \in C(i)$, contre sa définition. □

Corollaire 5.5.15 *$N(Q) = Q \rtimes \langle\sigma\rangle$; tous les éléments de $N(Q) \setminus Q$ sont d'ordre 3 ; tous les éléments d'un même coset strict de Q dans $N(Q)$ sont Q-conjugués.*

Preuve

D'après le Fait 5.5.6, tous les éléments des cosets σQ ou $\sigma^2 Q$ sont d'ordre 3. En particulier on a bien $N(Q) = Q \rtimes \langle\sigma\rangle$.

Soit $x \in N(Q) \setminus Q$. Comme Q est sans 3-unipotence (immédiat par le Corollaire 5.1.3), le Fait 5.5.7 impose que $C^\circ_Q(x) = 1$. En particulier $\mathrm{rg}(x^Q) = \mathrm{rg}(Q)$, et clairement $x^Q \subseteq xQ$ qui est de degré 1. Maintenant si $y \in xQ$, alors il en va de même de y^Q, donc $x^Q \cap y^Q \neq 1$, et cela prouve la conjugaison des éléments d'un même coset, c'est-à-dire $x^Q = xQ$. □

L'analogie avec [CJ04, Theorem 1.8] est désormais aussi grande que possible, la scission des sous-groupes de Borel restant hors de portée.

[BP90] Aleksandr Vasilievich Borovik and Bruno Petrovich Poizat. Tores et p-groupes. *J. Symbolic Logic*, 55(2) :478–491, 1990.